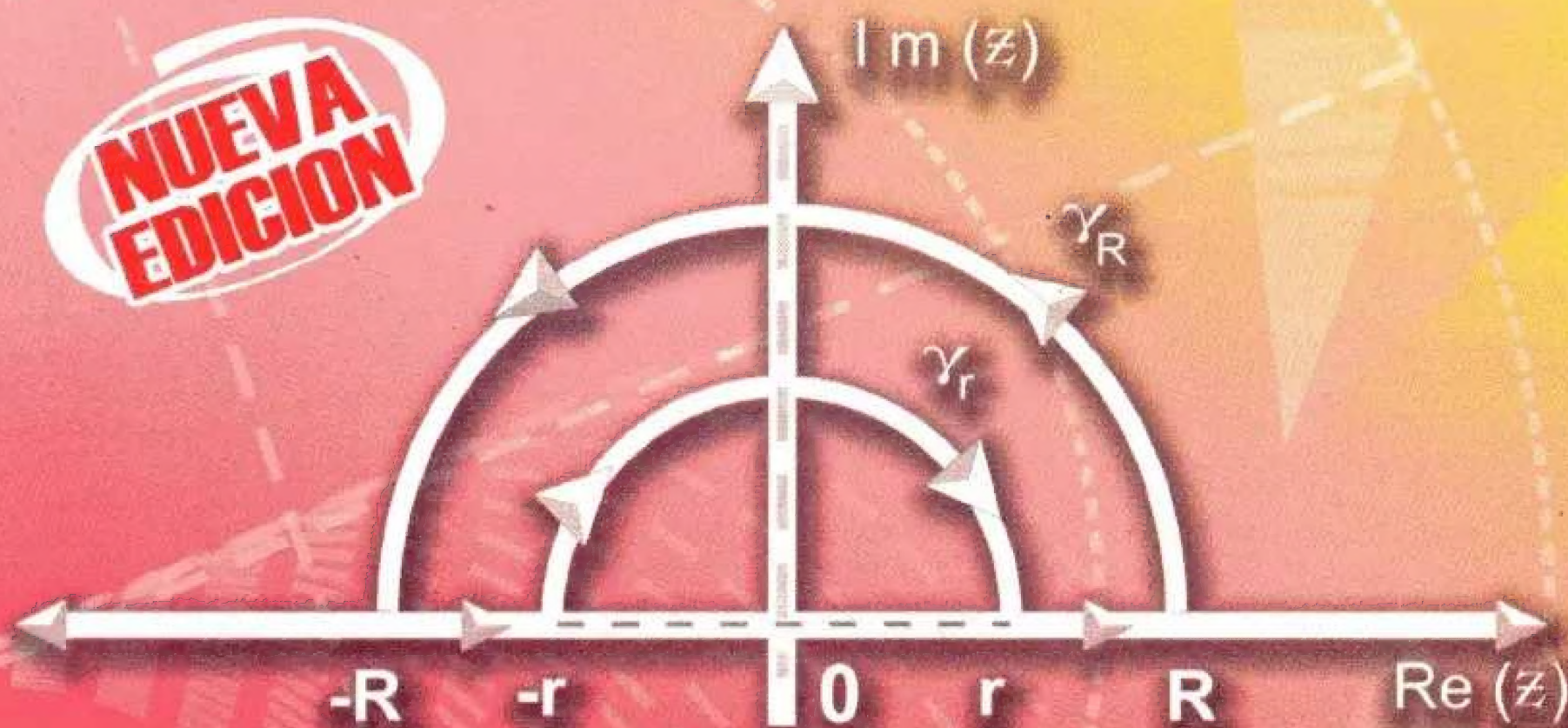


# VARIABLE COMPLEJA

**NUEVA  
EDICION**



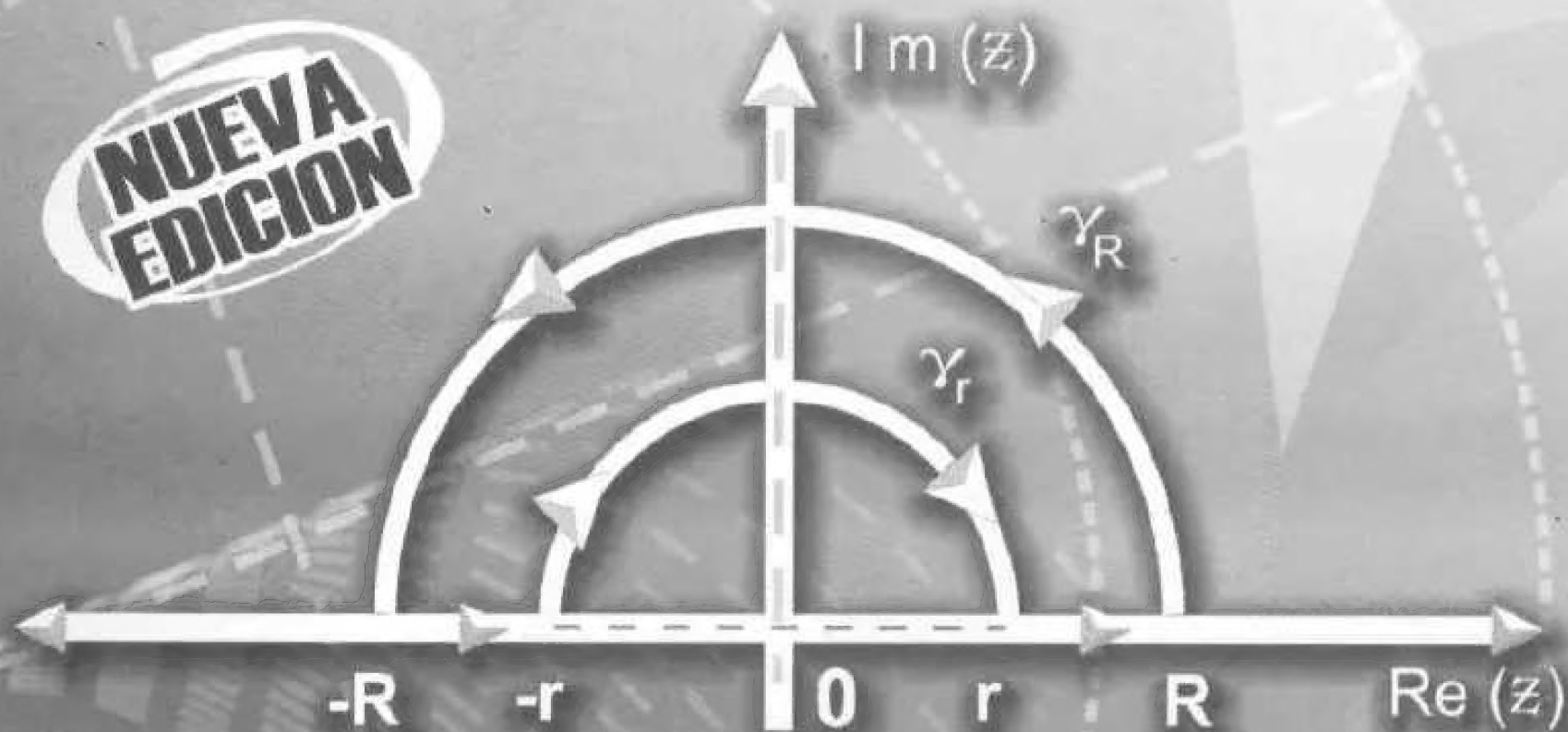
$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

**Eduardo Espinoza Ramos**



# VARIABLE COMPLEJA

**NUEVA  
EDICION**



$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

**Eduardo Espinoza Ramos**

**CAPÍTULO I**

**NÚMEROS COMPLEJOS**

	Pag.
1.1. Ecuaciones sin solución en $\mathbb{R}$	1
1.2. Definición	1
1.3. Definición	1
1.4. El Plano Complejo	2
1.5. Definición	2
1.6. Ejercicios Propuestos	3
1.7. Cero y Opuesto de un Número Complejo	4
1.8. Operaciones en Complejos	4
1.9. Unidad Imaginaria	10
1.10. Forma Estándar de los Números Complejos	10
1.11. Teorema	10
1.12. La Conjugación en $\mathbb{C}$	10
1.13. Módulo de un Número Complejo	11
1.14. Ejercicios Desarrollados	12
1.15. Ejercicios Propuestos	33
1.16. Forma Trigonométrica de un Número Complejo	43
1.17. Multiplicación y División en Forma Polar	45

18. Potencias y Raíces de un Número Complejo	45
19. Exponencial Compleja	49
20. Logaritmo en $\mathbb{C}$	51
21. Exponencial Compleja General	51
22. Ejercicios Desarrollados	52
23. Ejercicios Propuestos	54

**CAPÍTULO II**

**FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS O FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA**

1. Topología del Plano Complejo	75
2. Conjuntos Abiertos y Cerrados	78
3. Conjuntos Conexos	79
4. Funciones Complejas de Variable Compleja	81
5. Límites de una Función Compleja de Variable Compleja	84
6. Teorema	87
7. Teorema	89
8. Propiedades de Límite de una Función Compleja	90
9. Continuidad de una Función Compleja	95
10. Propiedades de Continuidad de Función Compleja	96
1. Teorema	97
2. Teorema	98
3. Ejercicios Desarrollados	99

**CAPÍTULO III**

**DERIVADAS DE FUNCIONES COMPLEJAS**

3.1. Definición	123
3.2. Propiedades de la Derivada de Función Compleja	124
3.3. Definición	125
3.4. Interpretación Geométrica de la Derivada	127
3.5. Ecuación de Cauchy - Riemann	128
3.6. Teorema	129
3.7. Ecuación de Cauchy - Riemann en Coordenadas Polares	131
3.8. Coordenadas Conjugadas	133
3.9. Funciones Analíticas	136
3.10. Funciones Armónicas	138
3.11. Ejercicios Desarrollados	141
3.12. Ejercicios Propuestos	164

**CAPÍTULO IV**

**LAS FUNCIONES TRASCENDENTES BÁSICAS**

4.1. La Función Exponencial	172
4.2. Propiedades de la Función Exponencial	172
4.3. Funciones Trigonométricas o Función Circular Compleja	175
4.4. Funciones Hiperbólicas Complejas	178
4.5. La Función Logaritmo y sus Ramas	179
4.6. Propiedades de la Función Logarítmica	180



4.8.	Funciones Trigonómicas Inversas	181
4.9.	Funciones Trigonómicas Hiperbólicas Inversas	185
4.10.	Ejercicios Propuestos	186

## CAPÍTULO V

### INTEGRACIÓN COMPLEJA

5.1.	Curvas en el Plano Complejo	192
5.2.	Definición	194
5.3.	Definición	195
5.4.	Definición	196
5.5.	Integrales Curvilíneas en $\mathbb{C}$	198
5.6.	Propiedades de las Integrales Curvilíneas	204
5.7.	Teorema de Green en el Plano	213
5.8.	Teorema de Green en el Plano Complejo	218
5.9.	Teorema de Cauchy para Integrales de línea en el Plano Complejo	219
5.10.	Teorema	221
5.11.	La Fórmula Integral de Cauchy	222
5.12.	Fórmula de la Integral de Cauchy para Derivadas Parciales	225
5.13.	Teorema de Acotación de Cauchy	229
5.14.	Teorema de Liouville	229
5.15.	Teorema de Morera	231
5.16.	Teorema Fundamental del Álgebra	232
5.17.	Teorema del Valor Medio de Gauss	232
5.18.	Teorema del Módulo Máximo	233
5.19.	Teorema del Módulo Mínimo	234
5.20.	Teorema del Argumento	234
5.21.	Aplicaciones del Teorema de Cauchy	235
5.22.	Ejercicios Desarrollados	244
5.23.	Ejercicios Propuestos	273

## CAPÍTULO VI

### SUCESIONES Y SERIES INFINITAS COMPLEJAS

6.1.	Definición de Sucesión Compleja	286
6.2.	Definición	287
6.3.	Definición	287
6.4.	Definición	287
6.5.	Definición	288
6.6.	Teorema Fundamental	288
6.7.	Definición	290
6.8.	Definición	290
6.9.	Definición	291
6.10.	Propiedades de las Sucesiones Complejas	291
6.11.	Teorema	291
6.12.	Series Infinitas de Números Complejos	292
6.13.	Teorema	293
6.14.	Teorema	294
6.15.	Propiedades de las Series Complejas	295
6.16.	Definición	296
6.17.	Definición	297
6.18.	Series Especiales	297
6.19.	Teorema	300
6.20.	Criterio de Convergencia	301
6.21.	Ejercicios Desarrollados	302
6.22.	Ejercicios Propuestos	320

## CAPÍTULO VII

### SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

7.1.	Series de Potencias	324
7.2.	Teorema (Criterio de la Razón)	325
7.3.	Funciones Representadas mediante Series de Potencias	328
7.4.	Derivación e Integración de Series	329
7.5.	Serie de Taylor y de Maclaurin Compleja	330
7.6.	Teorema	331
7.7.	Serie de Laurent	334
7.8.	Teorema	335
7.9.	Ejercicios Desarrollados	339
7.10.	Ejercicios Propuestos	365

## CAPÍTULO VIII

### TEORÍA DE LAS SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO

8.1.	Singularidad	375
------	--------------	-----

## CAPÍTULO IX

### EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES DEFINIDAS E IMPROPIAS (APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO)

9.	Integrales Especiales	419
9.1.	Ejercicios Desarrollados	426
9.2.	Ejercicios Propuestos	446

## CAPÍTULO X

### TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES

10.1.	Transformación Conforme	456
10.2.	Significado Geométrico de la Derivada	456
10.3.	Transformaciones Fraccionarias Lineales	457
10.4.	Teorema 1	463
10.5.	Teorema 2	466
10.6.	Teorema 3	467
10.7.	Problemas	471



8.2	Residuos	378
8.3	Teorema del Residuo	381
8.4	Teorema	381
8.5	Corolario	384
8.6	Ejercicios Desarrollados	386
8.7	Ejercicios Propuestos	410

## CAPÍTULO 1

### NÚMEROS COMPLEJOS

#### 1.1. ECUACIONES SIN SOLUCIÓN EN $\mathbb{R}$

Consideremos una ecuación sin raíces reales:  $x^2 + 2 = 0$ , es decir:  $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2 = 0\} = \emptyset$ , esto es debido a que:  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ , luego  $x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**GENERALIZANDO.-** Consideremos la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , con coeficientes reales, no tiene solución en  $\mathbb{R}$ . Si el discriminante es menor que cero, es decir:  $b^2 - 4ac < 0$ .

Luego para resolver la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , ampliaremos a otro conjunto llamado el conjunto de los "Números Complejos".

#### 1.2. DEFINICIÓN.-

Llamaremos números complejos a todo par ordenado de números reales el cual denotaremos por  $z = (a, b)$ . Al conjunto de los números complejos denotaremos por:

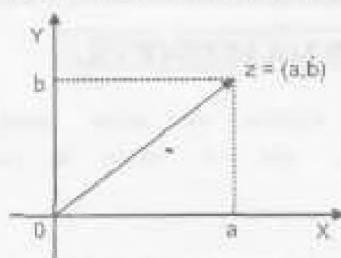
$$C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

#### 1.3. DEFINICIÓN.-

La parte real de un número complejo es su primera componente y la parte imaginaria es su segunda componente. luego tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Si  $z = (a, b)$  es un número complejo, entonces la parte real de  $z = (a, b)$  denotaremos por:  $\text{Re}(z) = a$ , y la parte imaginaria de  $z = (a, b)$  denotaremos por:  $\text{Im}(z) = b$ .

#### 1.4. EL PLANO COMPLEJO.-

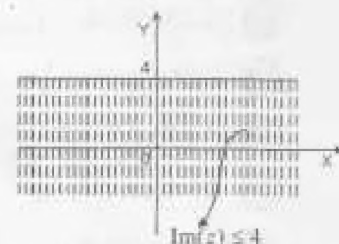
Entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano, existe una correspondencia biunívoca, de tal manera que todo número complejo  $z = (a, b)$  se puede representar geométricamente por un segmento orientado (flecha), que tiene su origen, en el origen de coordenadas y su extremo en el punto  $(a, b)$ .



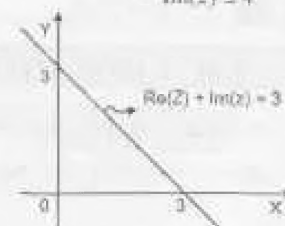
#### 1.5. DEFINICIÓN.-

Un número complejo es real, si y sólo si, su parte imaginaria es cero; un número complejo es imaginario puro, si y sólo si, su parte real es cero. Es decir:  $z = (a, b)$  un número complejo es real,  $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = b = 0$ .

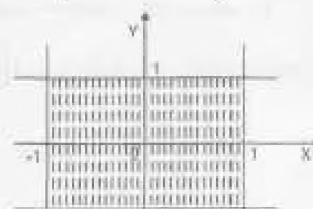
- 2) Sea  $z = (x, y)$  un número complejo entonces  $\text{Im}(z) = y$ , pero como  $\text{Im}(z) \leq 4$  entonces  $y \leq 4$ , que corresponde al semiplano que contiene al origen, cuyo borde es la recta de la ecuación  $y = 4$  (ver gráfica).



- 3) Sea  $z = (x, y)$  un número complejo de donde  $\text{Re}(z) = x \wedge \text{Im}(z) = y$ , pero como  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 3$ , entonces  $x + y = 3$ , que nos representa la recta que pasa por los puntos  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$ .



- 4) Sea  $z = (x, y)$  un número complejo, de donde  $\text{Re}(z) = x \wedge \text{Im}(z) = y$  pero como  $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1$  entonces  $-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1$ .





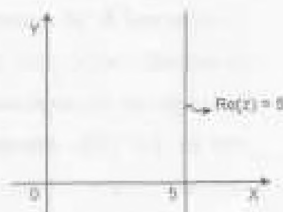
$z = (a,b)$  un número complejo es imaginario puro  $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = a = 0$

**Ejemplo.-** Determinar analíticamente y gráficamente los complejos  $z = (x,y)$ , tal que verifiquen:

- 1)  $\text{Re}(z) = 5$
- 2)  $\text{Im}(z) \leq 4$
- 3)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 3$
- 4)  $-1 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \wedge -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1$

#### Desarrollo

- 1) Sea  $z = (x,y)$  un número complejo, entonces  $\text{Re}(z) = x$ , pero como  $\text{Re}(z) = 5$ , entonces  $x = 5$ , es una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa  $x = 5$



### 1.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Describir analíticamente y gráficamente las siguientes relaciones:

- 1)  $\text{Re}(z) = -3$
- 2)  $\text{Im}(z) = -2$
- 3)  $\text{Re}(z) < 0$
- 4)  $\text{Im}(z) > 0$
- 5)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = -2$
- 6)  $\text{Re}(z) - \text{Im}(z) = 4$
- 7)  $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$
- 8)  $5 \text{Re}(z) - 3 \text{Im}(z) = 1$
- 9)  $-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2$
- 10)  $-2 \leq \text{Im}(z) \leq 2$
- 11)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) < 0$
- 12)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \leq 1$
- 13)  $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) > -2$
- 14)  $4 \text{Re}(z) - 5 \text{Im}(z) < 1$
- 15)  $-3 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 3$

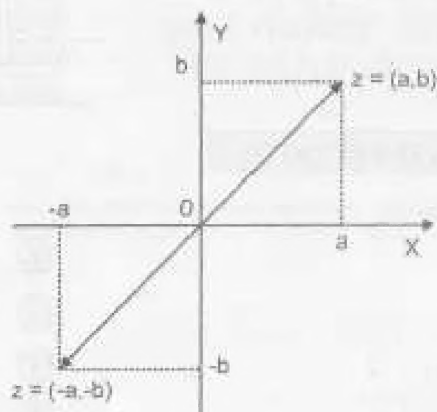
- 16)  $-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \text{Im}(z) \leq 2$
- 17)  $2 \leq \text{Re}(z) \leq 4 \wedge 2 \leq \text{Im}(z) \leq 4$
- 18)  $-6 \leq \text{Re}(z) \leq -2 \wedge -6 \leq \text{Im}(z) \leq -2$
- 19)  $-3 \leq \text{Re}(z) \leq 5 \wedge -5 \leq \text{Im}(z) \leq -2$
- 20)  $-5 \leq \text{Re}(z) \leq -3 \wedge 2 \leq \text{Im}(z) \leq 5$

### 1.7. CERO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Un número complejo es cero; si, tanto su parte real, como su parte imaginaria es cero, es decir:  $z = (a,b)$  es un número complejo cero  $\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$ .

El opuesto de un número complejo  $z = (a,b)$  es definido por:

$$-z = -(a,b) = (-a, -b)$$



### 1.8. OPERACIONES EN COMPLEJOS.-

#### a) IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Dos números complejos son iguales cuando tienen iguales su parte real y su parte imaginaria. Es decir:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

**Ejemplo.-**  $z_1 = (2,3)$  y  $z_2 = (2,3)$  son iguales ( $z_1 = z_2$ )

**Ejemplo.-**  $z_1 = (2,3)$  y  $z_2 = (3,5)$  no son iguales ( $z_1 \neq z_2$ )

$$\text{Luego: } (a,b) \neq (c,d) \Leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d$$

#### b) SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

La suma de dos números complejos, es un número complejo, que tiene por parte real a la suma de las partes reales de los sumandos y por parte imaginaria a la suma de las partes imaginarias de las mismas, es decir:

$$\text{Si } z_1 = (a,b) \text{ y } z_2 = (c,d) \text{ entonces la suma: } z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$$

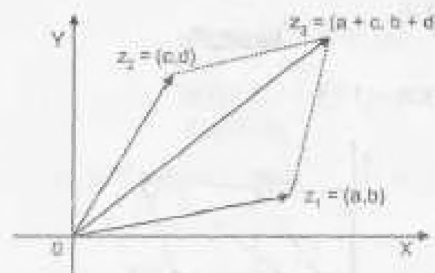
**Ejemplo.-** Calcular la suma de  $(2,4)$  y  $(3,5)$  es decir:

$$(2,4) + (3,5) = (2+3, 4+5) = (5,8)$$

#### c) REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean  $z_1 = (a,b)$  y  $z_2 = (c,d)$  dos números complejos, entonces se tiene:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) = z_3$$



#### d) PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , entonces:

$P_1$ . Propiedad de Clausura:  $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

$P_2$ . Propiedad Conmutativa:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$P_3$ . Propiedad Asociativa:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

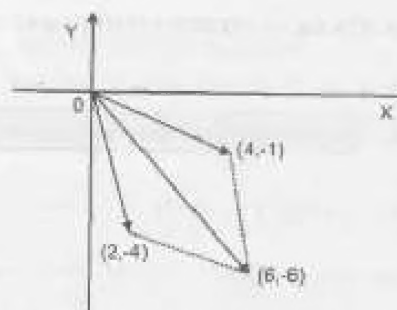
$P_4$ . Propiedad de Existencia y Unidad del Neutro Aditivo:

Existe el elemento neutro  $w \in \mathbb{C}$  tal que:  $z + w = z, \forall z \in \mathbb{C}$

$P_5$ . Propiedad de Existencia del Universo Aditivo, para cualquier  $z \in \mathbb{C}$  existe otro elemento que denotaremos por  $-z$ , tal que  $z + (-z) = (0,0)$ .

**NOTA.-** La demostración de estas propiedades se deja para el lector.

#### e) SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-



$$3) (6,-2) - (2,-5)$$

#### Desarrollo



Sean  $z_1 = (a, b)$  y  $z_2 = (c, d)$  dos números complejos, definimos la diferencia de

$z_1$  y  $z_2$  por:  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ , es decir:

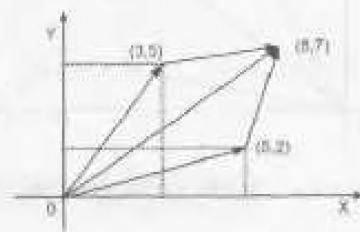
$$z_1 - z_2 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

**Ejemplos.** Efectuar las operaciones indicadas analíticamente y gráficamente.

1)  $(3, 4) + (5, 2)$

**Desarrollo**

$$(3, 4) + (5, 2) = (3 + 5, 4 + 2) = (8, 6)$$

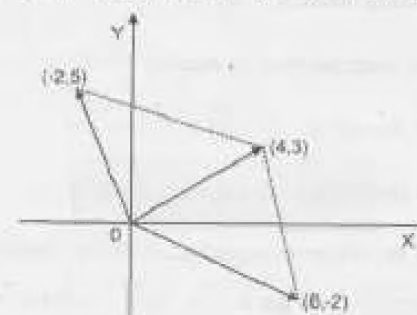


2)  $(4, -2) + (2, -4)$

**Desarrollo**

$$(4, -2) + (2, -4) = (4 + 2, -2 - 4) = (6, -6)$$

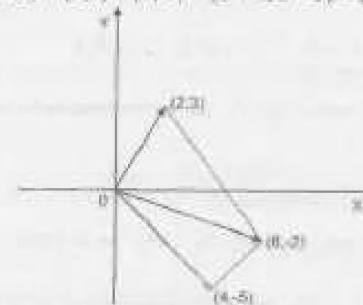
$$(6, -2) - (2, -5) = (6, -2) + (-2, 5) = (4, 3)$$



4)  $(2, 3) - (-4, 5)$

**Desarrollo**

$$(2, 3) - (-4, 5) = (2, 3) + (4, -5) = (2 + 4, 3 - 5) = (6, -2)$$



## f) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean  $z_1 = (a, b)$  y  $z_2 = (c, d)$  dos números complejos, al producto de  $z_1$  y  $z_2$  definiremos por:  $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

**Ejemplo.-** Sean  $z_1 = (2, 3)$  y  $z_2 = (1, 5)$

$$\text{Luego } z_1 \cdot z_2 = (2, 3) \cdot (1, 5) = (2 - 15, 10 + 3) = (-13, 13)$$

## g) PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , números complejos, entonces:

$P_1$ . Propiedad de la Clausura:  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$P_2$ . Propiedad Conmutativa:  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$P_3$ . Propiedad Asociativa:  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

$P_4$ . Propiedad Distributiva:  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$P_5$ . Propiedad de Existencia y unicidad del neutro multiplicativo. Existe un único número complejo  $u$  tal que  $u \cdot z = z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  siendo  $u = (1, 0)$

$P_6$ . Propiedad de Existencia y unicidad del inverso multiplicativo. Para cada número complejo  $z \neq (0, 0)$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $z \cdot \alpha = u$  siendo  $\alpha = z^{-1}$ ;  $u = (1, 0)$

$P_7$ . Para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \cdot z = k \cdot (a, b) = (ka, kb)$ .

Demostremos la propiedad  $P_6$ , las otras propiedades dejamos como ejercicio para el lector.

Sea  $z = (a, b) \neq (0, 0)$ , suponiendo  $\alpha = (x, y)$  tal que  $z \cdot \alpha = u$ , siendo  $u = (1, 0)$ , es decir:  $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ , que al efectuar la operación se tiene:

$(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$ , por definición de igualdad tenemos

Luego:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

## 1.9. UNIDAD IMAGINARIA.-

El número complejo imaginario puro de módulo correspondiente igual a 1, se llama unidad

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema se tiene: } x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Observamos que:  $(a, b) \neq (0, 0) \Leftrightarrow a \neq 0$  y/o  $b \neq 0$ , entonces  $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\text{por lo tanto: } \alpha = (x, y) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\text{Ejemplo.- Si } z = (3, 5) \Rightarrow z^{-1} = \left( \frac{3}{34}, -\frac{5}{34} \right)$$

## h) UNIDAD Y RECÍPROCO.-

El elemento neutro multiplicativo es la unidad compleja y denotaremos por  $u = (1, 0)$  ó también  $1 = (1, 0)$ .

El inverso multiplicativo  $\alpha$  de un número complejo  $z = (a, b) \neq (0, 0)$  se llama recíproco de  $z$  y denotaremos por:

$$\alpha = z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

**Observación.-** El número complejo  $(a, 0)$  se identifica con el número real  $a$ , y denotaremos como  $(a, 0) = a$ , en forma intercambiable.

## i) DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , siendo  $z_2 \neq (0, 0)$ , la división de  $z_1$  y  $z_2$  definiremos por:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} \text{ de esta definición obtenemos la regla para la división.}$$

$$\text{Si } z_1 = (a, b) \text{ y } z_2 = (c, d) \neq (0, 0), \text{ entonces: } z_2^{-1} = \left( \frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (a, b) \cdot \left( \frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2} \right) = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Los números complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto al eje real, así: Si  $z = a + bi$  su conjugada es:  $\bar{z} = a - bi$





El número complejo imaginario puro de segunda componente igual a 1, se llama unidad imaginaria y denotamos por:  $i = (0, 1)$ .

**OBSERVACIÓN.-** La multiplicación de un número complejo real por la unidad imaginaria permuta las componentes, es decir:

$$(b, 0)i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$$

### 1.10. FORMA STÁNDAR (RECTANGULAR O BINÓMICA) DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.-

Sea  $z = (a, b)$  un número complejo, por definición de suma tenemos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

Luego  $z = a + bi$  es la forma estándar (rectangular o binómica) del número complejo  $z$ .

### 1.11. TEOREMA.-

Demostrar que:  $i^2 = -1$

**Demostración**

$i^2 = ij = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$  por lo tanto  $i^2 = -1$ , como  $i^2 = -1$  entonces  $i = \sqrt{-1}$

### 1.12. LA CONJUGACIÓN EN $\mathbb{C}$ .-

a) **DEFINICIÓN.-** Llamaremos conjugado de  $z = a + bi$  al número complejo  $a - bi$ , al cual representaremos por  $\bar{z} = a - bi$

b) **DEFINICIÓN.-** Dos números complejos son conjugados si difieren solamente en sus partes imaginarias en los signos.



**PROPIEDADES:** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , Entonces:

$$P_1. \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$P_2. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$P_3. \overline{\overline{z_1}} = z_1$$

$$P_4. (z_1^{-1})^{-1} = (z_1^{-1}), z_1 \neq (0, 0)$$

$$P_5. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq (0, 0)$$

### 1.13. MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

El módulo de un número complejo  $z = a + bi$  es un número real positivo definido por:

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, el módulo de un número complejo  $z = a + bi$ , es la longitud del segmento orientado que representa a  $z = a + bi$

**Ejemplo:** Si  $z = 3 + 4i \Rightarrow \|z\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

#### a) PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , entonces:

$$P_1. \text{ Si } z_1 \neq (0, 0) \Rightarrow \|z_1\| > 0 \quad P_2. \text{ Si } \|z_1\| = 0 \Rightarrow z_1 = (0, 0)$$

$$P_3. \text{ Si } \|z_1\| = \|\overline{z_1}\| = \|\overline{\overline{z_1}}\| \quad P_4. \text{ Si } \|z_1\|^2 = z_1 \overline{z_1}$$

$$P_5. \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \quad P_6. \left\| \frac{z_1}{z_2} \right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}, z_2 \neq (0, 0)$$

$$P_7. \|z_1 z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\| \quad P_8. \operatorname{Re}(z) \leq \|z\|, \operatorname{Im}(z) \leq \|z\|$$

Demostraremos la propiedad  $P_5$ , los demás dejamos para el lector:

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = \|z_1\|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + \|z_2\|^2 \\ &= \|z_1\|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + \|z_2\|^2 \leq \|z_1\|^2 + 2\|z_1\| \cdot \|z_2\| + \|z_2\|^2 \\ &= (\|z_1\| + \|z_2\|)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto: } \|z_1 + z_2\|^2 \leq (\|z_1\| + \|z_2\|)^2$$

$$\therefore \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

### 1.14. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Hallar los valores de  $x$  e  $y$  si:  $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

**Desarrollo**

$$\text{Sean } z_1 = 1+2i = (1, 2); z_2 = 3-5i = (3, -5); z_3 = 1-3i = (1, -3)$$

Como  $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$ , entonces

$$(1, 2)x + (3, -5)y = (1, -3) \Rightarrow (x, 2x) + (3y, -5y) = (1, -3)$$

$$(x+3y, 2x-5y) = (1, -3) \text{ , por igualdad}$$

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema se tiene } x = -\frac{4}{11}, y = \frac{5}{11}$$

② Determinar los números reales  $a$  y  $b$  sabiendo que:  $(-1+i)a + (1+2i)b = 1$

**Desarrollo**

$$\text{Sean } z_1 = -1+i = (-1, 1); z_2 = 1+2i = (1, 2); z_3 = 1 = 1+0i = (1, 0)$$

Como  $(-1+i)a + (1+2i)b = 1$ , entonces:  $(-1, 1)a + (1, 2)b = (1, 0)$

$(-a+b, a+2b) = (1, 0)$ , por igualdad

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema } a = -\frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$$

③ Expresar cada uno de los siguientes ejercicios como:  $1, -1, i, -i$

a)  $i^3$

**Desarrollo**

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \text{ , de donde } i^3 = -i$$

b)  $i^7$

**Desarrollo**

$$i^7 = (i^2)^3 i = (-1)^3 i = -i \text{ , de donde } i^7 = -i$$

c)  $i^8$

**Desarrollo**

$$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1 \text{ , de donde } i^8 = 1$$

d)  $i^{14}$

**Desarrollo**

$$i^{14} = (i^2)^7 = (-1)^7 = -1 \text{ , de donde } i^{14} = -1$$



e)  $i^{17}$

**Desarrollo**

$$i^{17} = (i^2)^8 \cdot i = (-1)^8 i = i, \text{ de donde } i^{17} = i$$

4

Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresar en la forma binómica

a)  $(5+7i) + (8+2i)$

**Desarrollo**

$$(5+7i) + (8+2i) = (5+8) + (7+2)i = 13+9i$$

b)  $(2+\sqrt{3}i)(5-6\sqrt{3}i)$

**Desarrollo**

$$(2+\sqrt{3}i)(5-6\sqrt{3}i) = (2, \sqrt{3})(5, -6\sqrt{3})$$

$$= (10+18, -12\sqrt{3}+5\sqrt{3}) = (28, -7\sqrt{3}) = 28-7\sqrt{3}i$$

c)  $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

**Desarrollo**

$$(2+i)(3-2i)(1+2i) = (8-i)(1+2i) = 10+15i$$

$$\text{además } (1-i)^2 = -2i, \text{ luego}$$

$$\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2} = \frac{10+15i}{-2i} = \frac{(10+15i)(i)}{(-2i)i} = \frac{-15+10i}{2} = -\frac{15}{2} + 5i$$

d)  $\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2-i^5 + i^{10} - i^{13}}$

**Desarrollo**

$$i^4 + i^9 + i^{16} = 1+i+1=2+i \text{ y } 2-i^5 + i^{10} - i^{13} = 2-i-1+i=1$$

$$\text{Luego } \frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2-i^5 + i^{10} - i^{13}} = \frac{2+i}{1} = 2+i$$

e)  $\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} - \frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

**Desarrollo**

$$\frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 2\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = 3\left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -3$$

$$\frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3} = 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 2\left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^3 = 2\left(\frac{-2i}{2}\right)^3 = 2i$$

$$\text{Luego se tiene: } \frac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} - \frac{2(1-i)^3}{(1+i)^3} = -3-2i$$

f)  $\frac{1+i}{i} + \frac{i}{1-i}$

**Desarrollo**

$$\frac{1+i}{i} + \frac{i}{1-i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} + \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1} + \frac{i-1}{2} = \frac{1-i}{2} - \frac{i-1}{2}$$

g)  $(1+i)^n + (1-i)^n$

**Desarrollo**Si  $n$  es par entonces:

a)  $n=4k, k \in \mathbb{Z}$  Entonces  $(1+i)^n = (1+i)^{4k} = (-4)^k$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4k} = (-4)^k$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = (-4)^k + (-4)^k = 2(-4)^k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $n=4k+2, k \in \mathbb{Z}$  entonces  $(1+i)^n = (1+i)^{4k+2} = (-4)^k(+2i)$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4k+2} = (-4)^k(-2i)$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2i(-4)^k - 2i(-4)^k = 0$$

Si  $n$  es impar entonces:

a)  $n=4k+1, k \in \mathbb{Z}$  entonces  $(1+i)^n = (1+i)^{4k+1} = (-4)^k(1+i)$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4k+1} = (-4)^k(1-i)$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = (-4)^k(1+i) + (-4)^k(1-i) = 2(-4)^k, k \in \mathbb{Z}$$

b)  $n=4k+3, k \in \mathbb{Z}$  entonces  $(1+i)^n = (1+i)^{4k+3} = (-4)^k(-2+2i)$

$$(1-i)^n = (1-i)^{4k+3} = (-4)^k(-2-2i)$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = (-4)^k(-2+2i) + (-4)^k(-2-2i) = (-4)^{k+1}$$

5

Calcular  $i^n$ , donde  $n$  es un entero.**Desarrollo**Si  $n$  es par entonces

a)  $n=4k, k \in \mathbb{Z}$  entonces:  $i^n = i^{4k} = 1$

b)  $n=4k+2, k \in \mathbb{Z}$  entonces:  $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1$

Si  $n$  es impar entonces:

a)  $n=4k+1, k \in \mathbb{Z}$  entonces:  $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} i = i$

b)  $n=4k+3, k \in \mathbb{Z}$  entonces:  $i^n = i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = -i$

6

Demostrar que:  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}} = i^n(1-i)$ **Desarrollo**

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}} = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i)}{(1-i)^{n-1}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-1}(1+i)$$

7

Probar que:

a)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy, \text{ luego}$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z) \quad \therefore \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

b)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{x+iy-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im}(z) \quad \therefore \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

c)  $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x+iy \Rightarrow iz = -y+ix \Rightarrow \operatorname{Im}(iz) = x$$

$$\text{además } \operatorname{Re}(z) = x \text{ entonces } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(iz)$$

d)  $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2)$

**Desarrollo**

$$\text{Por el ejercicio b) se tiene } \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\text{Luego } \operatorname{Im}(z_1 z_2) = \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1 z_2}}{2i} = \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1} \overline{z_2}}{2i}$$

$$= \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1} \overline{z_2}}{2i} = \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1} \overline{z_2}}{2i} = \frac{z_1 z_2 - \overline{z_1} \overline{z_2}}{2i}$$



$$= (i)^{-1} (1+i) = \frac{i^0(1+i)}{i} = \frac{i^0(1+i)(-i)}{i(-i)} = i^0(1-i)$$

- 8 Si  $z$  es un número complejo tal que:  $\|z\| = 1$ , calcular  $\|1+z\|^2 + \|1-z\|^2$

**Desarrollo**

$$\begin{aligned}\|1+z\|^2 + \|1-z\|^2 &= (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z}) \\ &= 1+z+\bar{z}+\|z\|^2 + 1-z-\bar{z}+\|z\|^2 = 2+2\|z\|^2 = 2+2=4\end{aligned}$$

- 9 Demostrar que:  $\|z - \frac{3}{4}i\| = \frac{1}{4}$  si  $z = \frac{1-a}{1+2ai}$ , donde  $a$  es un número real.

**Desarrollo**

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{1-a}{1+2ai} - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai}$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{2a+i}{4+8ai} = \frac{(2a+i)(4-8ai)}{(4+8ai)(4-8ai)} = \frac{16a}{16+64a^2} = \frac{4-16a^2}{16+64a^2}i$$

$$z - \frac{3}{4}i = \frac{a}{1+4a^2} + \frac{1-4a^2}{4+16a^2}i, \text{ de donde}$$

$$\|z - \frac{3}{4}i\| = \sqrt{\left(\frac{a}{1+4a^2}\right)^2 + \left(\frac{1-4a^2}{4+16a^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

- 10 Calcular  $z^2$  siendo  $Z = -\|1+i\| + \sqrt{2}i$

**Desarrollo**

$$\|1+i\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z^2 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2 = 2 - 4i - 2 = -4i \quad \therefore z^2 = -4i$$

- 11 Hallar el número complejo  $z$  tal que:  $\|z\| = 1$  y  $\operatorname{Re}(z) = 0$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x = 0 \Rightarrow z = 0 + iy$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \frac{1}{4i} + \frac{1}{4i} = \frac{2}{4i} = \frac{2i}{2i \cdot 4i} = \frac{2i}{-8} = -\frac{i}{4} \\ &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2)\end{aligned}$$

$$\text{Como } \|z\| = 1 \Rightarrow \|z\| = \sqrt{y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\therefore z = \pm i$$

- 12 Describir y construir la gráfica del lugar representado para cada una de las ecuaciones siguientes:

a)  $\|z - i\| = 2$

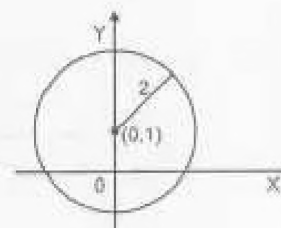
**Desarrollo**

$$\text{Como } z = x + iy$$

$$\text{entonces } \|z - i\| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$$

$$\text{de donde } x^2 + (y-1)^2 = 4, \text{ que es}$$

una circunferencia de centro  $(0,1)$  y radio 2.



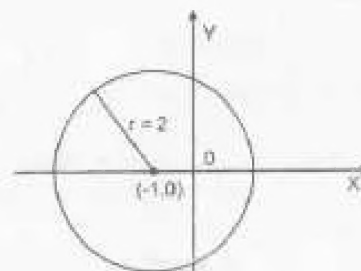
b)  $\operatorname{Re}[z(\bar{z}+2)] = 3$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$\text{Como } z(\bar{z}+2) = 3 \Rightarrow (x+iy)(x-iy+2) = 3$$

$x^2 + 2x + y^2 + 2yi = 3$  de donde  $x^2 + 2x + y^2 = 3$ , entonces  $(x+1)^2 + y^2 = 4$  que es una circunferencia de centro  $(-1,0)$  y radio 2.



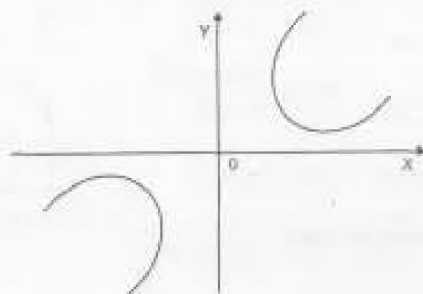
c)  $\operatorname{Im}(z^2) = 4$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \text{ de donde}$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy \text{ como } \operatorname{Im}(z^2) = 4 \text{ entonces}$$

$2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$  que es la ecuación de una hipérbola, su gráfico es:



d)  $\|z\| = \operatorname{Re}(z) + 1$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x$$

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Como } \|z\| = \operatorname{Re}(z) + 1, \text{ entonces}$$



$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow z + 2i = x + (y+2)i$$

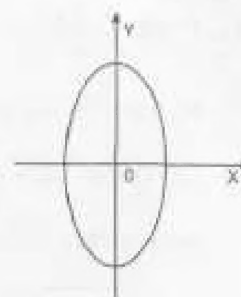
$$\|z + 2i\| = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$$z - 2i = x + (y-2)i$$

$$\|z - 2i\| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

como  $\|z + 2i\| + \|z - 2i\| = 6$ , entonces:

$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$ , de donde al quitar el radical y simplificando se tiene:  $9x^2 + 8y^2 = 45$ , que es la ecuación de una elipse.



- 13 Describir gráficamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

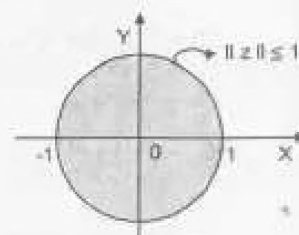
a)  $\|z\| \leq 1$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Como } \|z\| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

De donde  $x^2 + y^2 \leq 1$ , su gráfico es:





Como  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , entonces

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{de donde}$$

se tiene  $y^2 = 2x + 1$  que es la ecuación de la parábola

e)  $\|z + 2i\| + \|z - 2i\| = 6$

**Desarrollo**

c)  $1 \leq \|z + i\| \leq 2$

**Desarrollo**

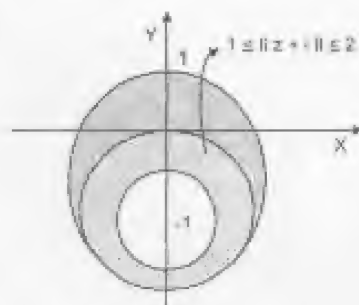
Sea  $z = x + iy \Rightarrow z + i = x + (y + 1)i$

$$\|z + i\| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

como  $1 \leq \|z + i\| \leq 2$  entonces

$$1 \leq \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \leq 2, \text{ de donde}$$

$$1 \leq x^2 + (y + 1)^2 \leq 4$$



d)  $\operatorname{Re}(z^2) > 1$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Luego  $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ , como

$$\operatorname{Re}(z^2) > 1 \Rightarrow x^2 - y^2 > 1$$

su gráfico es



e)  $\|z - 1\| \leq 2\|z + 1\|$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy \Rightarrow z - 1 = (x - 1) + iy$

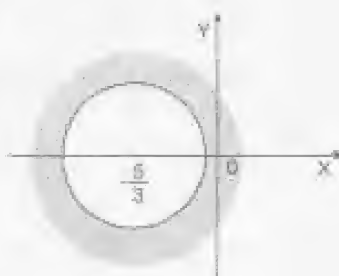
$$z + 1 = (x + 1) + iy$$

$$\text{Además } \|z - 1\| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$\|z + 1\| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

como  $\|z - 1\| \leq 2\|z + 1\| \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ , de donde

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$



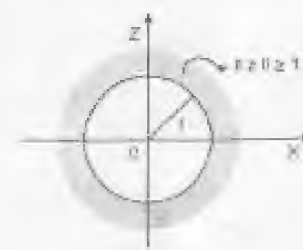
b)  $\|z\| \geq 1$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Como  $\|z\| \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$ , de

Donde  $x^2 + y^2 \geq 1$ , su gráfico es:



$$3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 \geq 0 \quad \text{entonces} \quad \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 \geq \frac{16}{9}$$

14) Demostrar la identidad:  $\|1 - zw\|^2 - \|z - w\|^2 = (1 - \|z\|^2)(1 - \|w\|^2)$

**Demostración**

Se conoce que  $\|z\|^2 = z\bar{z}$ , por lo tanto

$$\|1 - zw\|^2 = (1 - zw)(1 - \bar{z}\bar{w}) \quad ; \quad \|z - w\|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$$

$$\|1 - zw\|^2 - \|z - w\|^2 = (1 - zw)(1 - \bar{z}\bar{w}) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$$

$$= (1 - zw - \bar{z}\bar{w} + z\bar{z}w\bar{w}) - (z\bar{z} - w\bar{w} - z\bar{w} + w\bar{z})$$

$$= 1 + z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{z} - w\bar{w} = 1 + \|z\|^2\|w\|^2 - \|z\|^2 - \|w\|^2$$

$$= (1 - \|z\|^2)(1 - \|w\|^2)$$

15) Si  $\|z\| < 1$  y  $\|w\| < 1$ . Demostrar que:  $\left|\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right| < 1$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$

**Demostración**

Por hipótesis se tiene:  $\|z\| < 1$  y  $\|w\| < 1 \Rightarrow \|z\|^2 < 1$  y  $\|w\|^2 < 1$

Luego  $1 - \|z\|^2 > 0$  y  $1 - \|w\|^2 > 0$ , de donde  $(1 - \|z\|^2)(1 - \|w\|^2) > 0$  ... (1)

En el ejercicio 14) se tiene:  $(1 - \|z\|^2)(1 - \|w\|^2) = \|1 - zw\|^2 - \|z - w\|^2$  ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $\|1 - zw\|^2 - \|z - w\|^2 > 0$

de donde  $\|z - w\|^2 < \|1 - zw\|^2 \Rightarrow \|z - w\| < \|1 - zw\| \Rightarrow \left|\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right| < 1$

16) Si  $z, w \in \mathbb{C}$ . Demostrar que:  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z + w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z + w}\right) = 1$

$$\frac{\sqrt{\cos x + i\sqrt{\cos x}} - i\sqrt{\cos x} - i\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x + i\sqrt{\cos x}} + i\sqrt{\cos x} - i\sqrt{\cos x}} = \frac{1\sqrt{\cos x + i\sqrt{\cos x}} - i\sqrt{\cos x} - i\sqrt{\cos x}}{\cos x + i\sqrt{\cos x} + \cos x - i\sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{\cos x + i\sqrt{\cos x} - 2i\sqrt{\cos x} - \cos x}{2\cos x} = \frac{-i\sqrt{\cos x}}{\cos x}$$

$$= \frac{2i(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos x})}{2\cos x} = \frac{0}{\cos x} = 0$$

18) Probar que:  $\|z_1 + z_2\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2 = 2(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)$

**Desarrollo**

$$\|z_1 + z_2\|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$$

... (1)

$$\|z_1 - z_2\|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

**Demostración**

Sean  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ , entonces:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\frac{z}{z + w} = \frac{a + bi}{(a + c) + (b + d)i} = \frac{(a + bi)((a + c) - (b + d)i)}{[(a + c) + (b + d)i][(a + c) - (b + d)i]}$$

$$= \frac{a(a + c) + b(b + d) + a(b + d)i - b(a + c)i}{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z + w}\right) = \frac{a(a + c) + b(b + d)}{(a + c)^2 + (b + d)^2} \quad \dots (1)$$

$$\frac{w}{z + w} = \frac{c + di}{(a + c) + (b + d)i} = \frac{(c + di)((a + c) - (b + d)i)}{[(a + c) + (b + d)i][(a + c) - (b + d)i]}$$

$$= \frac{c(a + c) + d(b + d) - c(b + d)i + d(a + c)i}{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$



$$\operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = \frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad \dots (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = \frac{a(a+c)+b(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} + \frac{c(a+c)+d(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2} = \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} = 1$$

$$\therefore \operatorname{Re}\left(\frac{Z}{Z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{Z+w}\right) = 1$$

17 Simplificar la expresión: 
$$\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x + i\sqrt{\cos x}} - i\sqrt{\operatorname{sen} x - i\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{\operatorname{sen} x + i\sqrt{\cos x}} + i\sqrt{\operatorname{sen} x - i\sqrt{\cos x}}}$$

Desarrollo

Multipliando por su conjugado se tiene:

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}} = \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right|$$

$$\therefore |z| = \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right|$$

20 Hallar el módulo de: 
$$\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(3-8i)} \cdot \frac{6+4i}{3+i} (\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+4i)$$

Desarrollo

$$\operatorname{Sen} z_1 = \frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(3-8i)} \Rightarrow \|z_1\| = \frac{\sqrt{13.5}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{389}} = \frac{5}{34}$$

$$z_2 = \frac{(6+4i)(3-i)}{5+i} \Rightarrow \|z_2\| = 2\sqrt{5}$$

$$z_3 = (\sqrt{3}-i\sqrt{2})(3+4i) \Rightarrow \|z_3\| = \sqrt{5.5}$$

$$\text{Luego } \|z_1 z_2 z_3\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\| \cdot \|z_3\| = \frac{5}{34} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5.5} = \frac{125}{17}$$

$$\|z_1 z_2 z_3\| = \frac{125}{17}$$

21  $w = \frac{1+z}{1-z}$ , donde  $z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ , hallar  $w$ .

Desarrollo

Reemplazando  $z$  en  $w$  se tiene:

$$\text{Suponiendo que } z_1 \neq 0 \Rightarrow \exists z_1^{-1} \text{ tal que } z_1 z_1^{-1} = 1$$

$$\text{Como } z_1 z_2 = 0 \Rightarrow z_1^{-1} (z_1 z_2) = z_1^{-1} \cdot 0$$

$$\Rightarrow (z_1^{-1} z_1) z_2 = 0 \Rightarrow 1 z_2 = 0 \text{ de donde } z_2 = 0$$

en forma similar para  $z_1 = 0$

$$\text{Suponiendo que } z_2 \neq 0 \Rightarrow \exists z_2^{-1} \text{ tal que } z_2 z_2^{-1} = 1$$

$$\text{Como } z_1 z_2 = 0 \Rightarrow z_2^{-1} (z_1 z_2) = z_2^{-1} \cdot 0$$

$$\Rightarrow (z_2^{-1} z_2) z_1 = 0 \Rightarrow 1 z_1 = 0 \text{ de donde } z_1 = 0$$

$$= \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1}$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2 &= \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} \\ &= 2\|z_1\|^2 + 2\|z_2\|^2 = 2(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) \\ \therefore \|z_1 + z_2\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2 &= 2(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) \end{aligned}$$

19 Hallar el módulo de  $\frac{1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$

Desarrollo

$$\operatorname{Sen} z = \frac{1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \frac{(1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot (1 - \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{(1 - \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot (1 - \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}$$

## Números Complejos

$$w = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left( \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - i \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2})}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} (\operatorname{sen} \alpha - i \cos \alpha)$$

22 Demostrar que: Si  $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$ , Entonces  $z_2 = z_3$  (Propiedad de cancelación para la suma)

Desarrollo

$$\text{Como } z_1 \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists -z_1 \in \mathbb{C} \text{ tal que } z_1 + (-z_1) = (0,0)$$

$$\text{Luego } z_1 + z_2 = z_1 + z_3 \Rightarrow -z_1 + (z_1 + z_2) = -z_1 + (z_1 + z_3)$$

$$\Rightarrow (-z_1 + z_1) + z_2 = (-z_1 + z_1) + z_3$$

$$\Rightarrow 0 + z_2 = 0 + z_3 \Rightarrow z_2 = z_3$$

23 Demostrar que: Si  $z_1 \neq 0$  y si  $z_1 z_2 = z_1 z_3$ , Entonces  $z_2 = z_3$  (Propiedad de cancelación para la multiplicación)

Desarrollo

$$\text{Como } z_1 \neq 0 \Rightarrow \exists z_1^{-1} \text{ tal que } z_1 z_1^{-1} = 1$$

$$\text{Luego } z_1 z_2 = z_1 z_3 \Rightarrow z_1^{-1} (z_1 z_2) = z_1^{-1} (z_1 z_3)$$

$$\Rightarrow 1 z_2 = 1 z_3 \Rightarrow z_2 = z_3$$

24 Si  $z_1 z_2 = 0$  entonces  $z_1 = 0$  o  $z_2 = 0$

Desarrollo

## Números Complejos

$$\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}(z)^2 \geq 2 |\operatorname{Re}(z)| \cdot |\operatorname{Im}(z)| \quad \dots (3)$$

$$\text{por lo tanto de (1) y (2) se tiene: } \|z\|^2 \geq 2 |\operatorname{Re}(z)| \cdot |\operatorname{Im}(z)|$$

27 Demostrar que:  $\sqrt{2} \|z\|^2 \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Desarrollo

$$\text{Como } \|z\|^2 \geq 2 |\operatorname{Re}(z)| \cdot |\operatorname{Im}(z)| \text{ sumando } \|z\|^2$$

$$2 \|z\|^2 \geq \|z\|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z)| \cdot |\operatorname{Im}(z)|$$

$$2 \|z\|^2 \geq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z)| \cdot |\operatorname{Im}(z)|$$



- 28) Hallar dos números complejos  $z_1$  y  $z_2$  cuya suma sea el número real  $x$  y cuya diferencia sea el número imaginario  $iy$ .

**Desarrollo**

Por condición del problema se tiene:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = x & (1) \\ z_1 - z_2 = iy & (2) \end{cases}$$

Sumando (1) y (2) se tiene:  $2z_1 = x + iy$  de donde  $z_1 = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}i$

restando (1) y (2) se tiene:  $2z_2 = x - iy$  de donde  $z_2 = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}i$

- 29) Demostrar que:  $\|z\|^2 \geq 2\| \operatorname{Re}(z) \| \cdot \| \operatorname{Im}(z) \|$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , además  $\operatorname{Re}(z) = x$ ,  $\operatorname{Im}(z) = y$

Luego  $\|z\| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \Rightarrow \|z\|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$  ... (1)

como  $(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z))^2 \geq 0$ , de donde

Como  $|x|, |y| \geq 0$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , entonces

$$2|x||y| \geq 0 \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$$

$$(|x| + |y|)^2 \geq |x|^2 + |y|^2 \geq 0$$

$$|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \geq \|z\|$$

Luego  $\|z\| \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$  ... (2)

de (1) y (2) se tiene:  $\left| \frac{\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}} \right| \leq \|z\| \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$

- 30) Hallar  $z$  tal que:  $\|z\| - z = 1 + 2i$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy \Rightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , al reemplazar se tiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i, \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{3}{2}. \text{ Luego } z = \frac{3}{2} - 2i$$

- 31) Si  $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ ,  $z^n = 1$ ,  $z \neq 1$  y  $M = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ . Hallar  $\operatorname{Re}(M)$  y  $\operatorname{Im}(M)$

**Desarrollo**

Como  $M = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ , multiplicando por  $z$

$$zM = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$$

$$M - zM = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n$$
 ... (1)

como  $z^n = 1 \Rightarrow z^n - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1) = 0$

$$2\|z\|^2 \geq (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))^2 \Rightarrow \sqrt{2}\|z\| \geq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$$

- 28) Probar que  $\left| \frac{\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}} \right| \leq \|z\| \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy$  de donde  $\operatorname{Re}(z) = x$ ,  $\operatorname{Im}(z) = y$

Además  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , la demostración del problema equivale probar que:

$$\left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

como  $x, y \in \mathbb{R}$  entonces  $(x-y)^2 \geq 0$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x+y| \text{ de donde } \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Luego  $\left| \frac{\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)}{\sqrt{2}} \right| \leq \|z\|$  ... (1)

como  $z^n = 1 \Rightarrow z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$  ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $M - zM = 0 - nz^n$

$$M(1-z) = -nz^n \text{ de donde } M = \frac{-nz^n}{1-z} \text{ puesto que } z^n = 1$$

Como  $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , entonces

$$M = \frac{-n}{1 - \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta} = \frac{-n}{(1 - \cos \theta) - i \operatorname{sen} \theta} = \frac{-n}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 2i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$M = \frac{-n}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2})} = \frac{-n(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2})}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} i \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

de donde  $\operatorname{Re}(M) = \frac{n}{2}$  y  $\operatorname{Im}(M) = \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$

- 31) Si  $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ . Hallar  $(1+w)^n$

**Desarrollo**

$$1+w = 1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} i = 2 \cos \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2})$$

$$(1+w)^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} (\cos \frac{n\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\theta}{2}) = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{i \frac{n\theta}{2}}$$

- 32) Simplificar  $(1+w)^n$ , donde  $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$

**Desarrollo**

$$1+w = 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} i$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{3} (\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}) = 2 \cos \frac{\pi}{3} e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$(1+w)^n = (\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} = e^{i \frac{n\pi}{3}}$$

- 33) Hallar la suma de  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \dots + \operatorname{sen}^2 (2n-1)x$

**Desarrollo**

$$A + iB = z^n \cdot \frac{2 \operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} 2x} \left( \frac{\operatorname{sen} 2nx - i \cos 2nx}{\operatorname{sen} 2x - i \cos 2x} \right) = z^n \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x} \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2} - 2nx - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 2nx}{\cos \frac{\pi}{2} - 2x - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 2x} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x} (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)(\cos(-2nx + 2x) - i \operatorname{sen}(2nx - x))$$



Aplicando la identidad  $\sin \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \dots + \sin^2 (2n-1)x$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} + \dots + \frac{1 - \cos 2(2n-1)x}{2}$$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \dots + \cos 2(2n-1)x)$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \dots + \cos 2(2n-1)x) \quad \dots (I)$$

$$A = \cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \dots + \cos 2(2n-1)x$$

$$B = \sin 2x + \sin 6x + \sin 10x + \dots + \sin 2(2n-1)x$$

$$iB = i \sin 2x + i \sin 6x + i \sin 10x + \dots + i \sin 2(2n-1)x$$

ahora sumando A y iB se tiene:

$$A + iB = (\cos 2x + i \sin 2x) + (\cos 6x + i \sin 6x) + \dots + (\cos 2(2n-1)x + i \sin 2(2n-1)x)$$

$$= z^2 + z^6 + z^{10} + \dots + z^{2(2n-1)x}$$

donde  $z = \cos x + i \sin x \Rightarrow z^n = \cos nx + i \sin nx$

$$A + iB = z^2 (1 + z^4 + z^8 + \dots + z^{2(2n-1)}) = z^2 \left( \frac{1 + (z^4)^{2n}}{1 + z^4} \right) = z^2 \left( \frac{1 - \cos 4nx - i \sin 4nx}{1 - \cos 4x - i \sin 4x} \right)$$

$$= z^2 \left( \frac{2 \sin^2 2nx - 2i \sin 2nx \cos 2nx}{2 \sin^2 2x - 2i \sin 2x \cos 2x} \right)$$

$$= \frac{\sin 2nx}{\sin 2x} (\cos(2x - 2nx - 2x) + i \sin(2nx - 2x - 2x)) = \frac{\sin 2nx}{\sin 2x} (\cos 2nx - i \sin 2nx)$$

$$A = \frac{\sin 2nx}{\sin 2x} \cos 2nx = \frac{\sin 4nx}{2 \sin 2x} \quad y \quad B = \frac{\sin 2nx}{\sin 2x} \sin 2nx = \frac{\sin^2 2nx}{\sin 2x}$$

### 1.15. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1 Hallar los números reales  $x$  e  $y$  tal que:  $2x - 3iy - 2y - 5 = 10i - (x + y - 2) - (y - x + 3i)$

2 Que valores han de tomar  $x$  e  $y$  para satisfacer la ecuación

$$(2 - 5i)x + (1 + 3i)y - 8 + 9i = 0$$

3 Hallar las soluciones reales de las ecuaciones

a)  $(3x - i)(2 - i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$

b)  $(4 + 2i)x + (5 - i)y = 13 + i$

c)  $(x - iy)(a - bi) = i^3$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales  $|a| \neq |b|$

4 Hallar los valores de  $a$  y  $b$  si:  $(a + b) + (a - b)i = 7 + 2i$

5 Hallar los valores de  $a$  y  $b$  si:  $(a + b) + (a - b)i = (2 + 5i)^2 + i(2 - 3i)$

6 Resolver el sistema de ecuaciones en  $\mathbb{C}$ : 
$$\begin{cases} (1+i)x - iy = 2 \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$$

7 Resolver el sistema de ecuaciones.

a) 
$$\begin{cases} x + iy = 1 \\ ix + y = 1 + i \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} (1-i)x + 2iy = 3 \\ 4x + (1-i)y = 2 + i \end{cases}$$

8 Resolver el sistema de ecuaciones

a) 
$$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} (3+i)x + (4+2i)y = 2 + 6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5 - 4i \end{cases}$$

9 Resolver el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ z - y + 2iz = 20 \\ (ix + 3iy) - (1+i)z = 30 \end{cases}$$

10 Resolver el sistema de ecuaciones, suponiendo que  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} (1-i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1 + 5i \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2 - i \end{cases}$$

11 Si  $z = x - iy$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ , hallar los valores de  $x$  e  $y$  cuando  $\frac{3z}{1-i} + \frac{3z}{i} = \frac{4}{3-i}$

12 Efectuar las siguientes operaciones y el resultado expresarlo en la forma binómica.

a)  $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$  b)  $\frac{1+3i}{i(4-5i)} + \frac{2}{i}$  c)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1-i}\right)^2$

d)  $\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$  e)  $\frac{(1-i)^2 - 1}{(i+i)^2 + 1}$  f)  $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2}$

13 Comprobar que:

a)  $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}$  b)  $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{2i}{3}$

14 Si  $a, b$  e  $y$  son números reales, resolver la ecuación  $\frac{ib}{1+i} = \frac{3x+4i}{a+3i}$

15 Demostrar que  $\frac{\sqrt{1+x^2} + iy}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i$ , ( $x$  es real)

16 Expresar  $x$  e  $y$ , mediante  $u$  y  $v$  si:  $\frac{1}{x+2i} + \frac{1}{y+i} = 1$ , donde  $u, v, x, y$ , son reales

17 Si  $z = (a, b)$  y  $w = (c, d)$  resolver el sistema  $ix + (1+i)w = 3+i$ ;  $(1+i)z - (6-i)w = 4$

18 Demostrar si  $\theta$  es un ángulo arbitrario, entonces:  $\frac{1}{\cos \theta \pm i \sin \theta} = \cos \theta \mp i \sin \theta$

19 Reducir las siguientes expresiones algebraicas a la forma  $a + bi$ .

a)  $\frac{1+i}{(3-i)(1-i)}$  b)  $(1+i)(2-i)(1-i)$  c)  $\frac{12+8i}{2-3i} + \frac{52+13i}{13i}$

d)  $\left[ \frac{34}{(1-4i)(5+3i)} \right]^2$  e)  $\frac{i \operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(iz)}$  f)  $\frac{(1-i)(1+i)}{3-i} - \frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$

g)  $\frac{1}{(a+bi)^2} + \frac{1}{(a-bi)^2}$  h)  $(2\sqrt{3}+2i)(3-3\sqrt{3}i)$  i)  $\frac{8+8\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}+2i}$

20 Demostrar que:

a)  $\overline{z+3i} = \bar{z} - 3i$  b)  $\overline{iz} = -\bar{z}$  c)  $\frac{(2+i)^2}{3-4i} = 1$

21 Si  $a$  y  $b$  son números reales, demostrar que:  $\left\| \frac{a+bi}{b+ai} \right\| = 1$

22 Resolver las siguientes ecuaciones en  $z$

a)  $iz = 1$  b)  $(1+iz) = i$  c)  $(2-i)z = 1$

23 Si  $z = x + iy$ , hallar:

a)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$  b)  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$  c)  $\operatorname{Im}(z^2)$

d)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)$  e)  $\operatorname{Re}(z^2 + z)$  f)  $\operatorname{Re}(-iz)$

g)  $\operatorname{Im}(4iz^2 - 6z + 8i)$  h)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z} - i\right)$



24. Indicar que líneas se determinan por las siguientes ecuaciones:
- a)  $\operatorname{Im}(z^2) = 2$       b)  $\operatorname{Re}(z^{-2}) = 1$       c)  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$
- d)  $\operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2 - \operatorname{Im}(z)$       e)  $2x\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$
25. Comprobar la identidad  $x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$
26. Calcular  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ , donde  $n$  es un entero positivo
27. Analizar si el polinomio  $P(x) = x^4 \sin x - x^{n-1} \sin(n\alpha) + x^2 \sin(\theta-1)\alpha$  es divisible por  $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2$
28. Halle todos los valores reales de  $x$  y los valores correspondientes a "w" que hacen que el número complejo  $w = (x-i)[(x+3)-4i]$  sea imaginario puro.
29. Demostrar que si  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 = \bar{z}^2$  entonces "z" es real e imaginario puro.
30. Hallar el número complejo  $z$ , tal que sea conjugado con su cubo.
31. Hallar el número complejo  $z$ , tal que sea conjugado con su cuadrado.
32. Hallar el lugar geométrico de los puntos, tal que:  $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$
33. Demuestre que:
- a)  $\operatorname{Re}(z\bar{w} + \bar{z}w) = z\bar{w} + \bar{z}w$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$
- b)  $\operatorname{Im}(z\bar{w} - \bar{z}w) = z\bar{w} - \bar{z}w$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$
34. Escribir en forma compleja las ecuaciones
- a)  $x^2 - y^2 = a^2$       b)  $x^2 + y^2 - 2x = 0$
35. Demostrar que si  $z_1 z_2 z_3 = 0$ , entonces al menos uno de los factores es nulo.
36. Demostrar que:  $\|z - \frac{3i}{4}\| = \frac{1}{4}$  si  $z = \frac{1-a}{1+2ai}$ ,  $a \in \mathbb{R}$

37. Demostrar que:  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$
38. Demostrar que:  $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2i}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)$
39. Sean  $z, w \in \mathbb{C} / zw \in \mathbb{R}$ ,  $zw \neq 0$  entonces  $\exists k \in \mathbb{R} / z = k\bar{w}$
40. Calcular  $z^{-2}$  siendo  $z = -1 + i + \sqrt{3}i$
41. Dado  $z = 1 + \sin \alpha + i \cos \alpha$ , determinar  $\|z^2 - \bar{z}\|$
42. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , demostrar que:  $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 0$
43. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $z(1+3i) = 1-3i$
44. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$
45. Describir y construir la gráfica del lugar representado por cada una de las ecuaciones
- a)  $\|z\| - z = 1 + 2i$       b)  $\|z+i\| = 2 \operatorname{Im}(z)$
- c)  $\|z+1\| + \|z-1\| = 3$       d)  $\|z-3\| - \|z+3\| = 4$
- e)  $\|z-1+i\| = 2$       f)  $\|z-i\| - \|z+i\| = 2$
- g)  $\|z-2\| = \|1-2z\|$       h)  $\|z\| - 3 \operatorname{Im}(z) = 6$
46. Si  $\|z+16\| = 4\|z+1\|$ , calcular  $\|z\|$
47. Si  $\|z\| = 1$ , probar que  $\frac{az+b}{bz+a} = 1$ , para todo  $a, b \in \mathbb{C}$
48. Hallar la expresión cartesiana de  $\|z-3\| + \|z+3\| = 10$  y graficar la región  $\|z-3\| + \|z+3\| \leq 10$

49. Indicar que líneas se determinan por las siguientes ecuaciones:
- a)  $\|z-i\| + \|z+i\| = 4$       b)  $\|z+i\| = 2 \operatorname{Im}(z)$
- c)  $\operatorname{Re}(1+z) = \|z\|$       d)  $\|z-i\| = \frac{\operatorname{Re}(z)}{2}$
50. Si  $\|z-i\| + \|z+i\| = 2a$ ,  $a > 0$ , probar que  $\|z\| \leq a$
51. Demostrar que si  $\|z-4i\| + \|z+4i\| = 10$ , es una elipse.
52. Que lugar describe el punto  $z = x + iy$ , cuando satisface a las siguientes ecuaciones
- a)  $\|z-2\| + \|z\| = 4$       b)  $\|z-2\| \cdot \|z\| = 2$
- c)  $\|z-2\| \cdot \|z\| = -1$       d)  $\|z-i\| + \|z+i\| = 5$
- e)  $\bar{z} + z = \|z\|^2$       f)  $\left\|\frac{z-2}{z-1}\right\| = 4$
53. Mostrar que la ecuación de una recta es determinado por dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  que cumple con la ecuación  $\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0$
54. Determinar analíticamente y gráficamente los subconjuntos de  $\mathbb{C}$  que verifican
- a)  $\|z+1\| + \|z-1\| = 3$       b)  $\|z+c\| \cdot \|z-c\| = c^2$
- c)  $\|z+3\| + \|z-3\| = 10$       d)  $3\|z\| - \operatorname{Re}(z) = 12$
55. Mostrar que una ecuación para una circunferencia que pasa por 3 puntos  $z_1, z_2, z_3$  está dado por:  $\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) \left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right) = \left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right) \left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$
56. Hallar  $z$  tal que  $\|z\| + z = 2+i$
57. Si  $z, w \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| = \|w\| = 1$ ,  $zw \neq 1$ , verifican que  $\left\|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right\| = 1$

58. Si  $z, w$  son números complejos y  $u = \sqrt{zw}$ , probar que
- $$\|z\| + \|w\| = \left\|\frac{z+w}{2} - u\right\| + \left\|\frac{z+w}{2} + u\right\|$$
59. Demostrar que:  $\|z_1\| + \|z_2\| = \left\|\frac{z_1+z_2}{z_1} - (z_1 z_2)^2\right\| + \left\|\frac{z_1+z_2}{z_1} + (z_1 z_2)^2\right\|$
60. ¿Qué curva determina la ecuación  $\|z+c\| + \|z-c\| = 2a$ , donde  $a, y c \in \mathbb{R}^+$ ,  $a > c$ ?
61. ¿Qué curva del plano XOY se determina por la ecuación  $zx + i(z-z) - 2 = 0$ ?
62. Si  $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ , demuestre que si  $\|z\| < 1$  implica  $\operatorname{Im}(w) > 0$
63. Determinar la región que describe la relación siguiente:
- a)  $\|z-1\| \leq \operatorname{Re}(z)$       b)  $0 < \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$
- c)  $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$       d)  $0 < \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{\pi}{2}$
- e)  $1 \leq \|z+2+i\| \leq 2$       f)  $\|z-2+i\| \leq 1$
- g)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq \|z\|$       h)  $\|z\| > 2 + \operatorname{Im}(z)$
64. Describir gráficamente la región representada por:
- a)  $\|z\| + 2 + \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2$
- b)  $\|z-1-i\| \leq 2 - \operatorname{Im}(\bar{z}) \wedge \|z-1+\frac{1}{2}\| \leq 2$
- c)  $\operatorname{Im}\{(z-1+i)^2\} \geq 2 \wedge \|z-1+i\| \leq 3$
65. Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos  $z$  que



58. Sea  $P > 0$  y  $P \neq 1$ , probar que  $\left\| \frac{1-z}{1+z} \right\| = P$ , representa a una circunferencia.

40

Eduardo Espinoza Ramos

67. Si  $z = x + iy$ , siendo  $x$  e  $y$  reales, demostrar que el lugar geométrico  $\left\| \frac{z-2}{z+2} \right\| = 2$  es una circunferencia y determinar su centro y su radio.

68. Describir geométricamente la región representada por cada una de las siguientes desigualdades.

- a)  $1 \leq \|z+1\| \leq 2$       b)  $\|z+3i\| > 4$   
 c)  $\|z+2-3i\| + \|z-2+3i\| < 10$       d)  $-4 < \|z-1\| + \|z+1\| < 5$   
 e)  $-2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3 \wedge -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 5$       f)  $-2 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2 \wedge -2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$   
 g)  $\|z\| \leq \|2z+1\|$       h)  $\|z-i\| \leq \|z+i\|$

69. Sea  $w = \frac{ac+b}{cz+d}$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , demostrar que:  $w - \bar{w} = \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{\|cz+d\|^2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$

70. Hallar las  $z = x + iy$ , que satisfacen la condición dada:

- a)  $\|z-3i\| = \|z+2i\| < 9$       b)  $\|1+z^2\| < \|2z\|$   
 c)  $\|z+2\| \cdot \|z-2\| > 5$       d)  $\|z-3\| + \|z-4\| \leq 5$   
 e)  $\left\| \frac{z-2}{z+2} \right\| < 2$       f)  $\left\| \frac{z-2}{z+2} \right\| > 2$   
 g)  $4 \leq \|z-1\| + \|z+1\| \leq 8$       h)  $\|z^2-1\| \geq a^2$ ,  $a > 0$

71. Si  $z$  se encuentra fuera de la circunferencia  $C = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 2\}$  probar que  $\|e^{z^2+2z-3}\| > 1$

72. Si  $z$  se encuentra dentro de la circunferencia  $C = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 2\}$  demostrar que  $\|e^{z^2+2z-3}\| < 1$

73. Hallar el lugar geométrico representado por la desigualdad  $\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$

74. Demostrar la identidad:  $\|z_1+z_2\|^2 + \|z_1-z_2\|^2 = 2(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)$

42

Eduardo Espinoza Ramos

89. Sean  $x, u, w \in \mathbb{C} / x+u+w=0$  y  $\|x\|=\|u\|=\|w\|$ . Verificar que los puntos  $x, u, w$  son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 1.

90. Si  $0 \leq \|z\| < 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , demostrar que  $\|e^z-1\| \leq 2\|z\|$

91. Demostrar que:  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1-z^{20}}{1-z}$ ,  $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

92. Probar que para toda  $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$

$$\|z_1 w_1 + z_2 w_2\|^2 \leq (\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2)$$

93. Probar que:  $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 - z_2\|$

94. Demuestre que  $\left| \frac{\|z_1\| - \|z_2\|}{\|z_1 + z_2\|} \right| \leq 1$ , para  $z_1 + z_2 \neq 0$

95. Demuestre que si " $k$ " es una constante real positivo, entonces la ecuación  $\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = k$  representa a un círculo si  $k \neq 1$  y una recta si  $k = 1$ .

96. Sean  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $w = \frac{a-b}{1-ab}$ . Demostrar que  $w - \bar{w} = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - (a\bar{b} + \bar{a}b)}{1 + \|a\|^2 + \|b\|^2 - (a\bar{b} + \bar{a}b)}$  y que  $\|a\| < 1 \Leftrightarrow \|w\| < 1$

97. Si  $0 \leq \|z\| \leq 1$ , probar que  $\frac{1}{4}\|z\| \leq \|e^z - 1\| \leq \frac{7}{2}\|z\|$

satisface a las desigualdades.

a)  $\|z\| < 2$

b)  $\|z-i\| \leq 1$

c)  $\|z-1-i\| < 1$

Números Complejos

4

75. Demostrar que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\left\| \frac{1}{1-z} \right\| \geq \frac{1}{1+\|z\|}$

76. Demostrar que:  $\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 \geq z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1$

77. Partiendo de consideraciones geométricas, verificar que:

a)  $\left\| \frac{z}{z\|} - 1 \right\| < |\arg(z)|$ ,  $z \neq 0$

b)  $\|z-1\| \leq \|z\|+1 \leq \|z\|+|\arg(z)|$

78. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq w$ , Probar que:  $\frac{\|z\| \|w\| + w\|z\|}{\|z+w\|} \leq \frac{2\|zw\|}{\|z\| + \|w\|}$

79. Probar que cuando  $\|z_1\| \neq \|z_2\|$ ,  $\left\| \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \right\| \leq \frac{\|z_1\| + \|z_2\|}{\|z_1\| - \|z_2\|}$

80. Probar que si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , entonces:  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$

81. Si  $z = x + iy$ , probar que:  $|x| + |y| \leq \sqrt{2} \|z\|$

82. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , probar la desigualdad  $\left\| \frac{z}{z+w} \right\| \leq \frac{\|z\|}{\|z\| - \|w\|}$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z, w \neq 0$

83. Si  $\|z_1\| < 1$  y  $\|z_2\| < 1$  probar que:  $\|z_1+z_2\| < \|1-\bar{z}_1 z_2\|$

84. Demostrar que:  $\|z_1+z_2\| \geq \frac{1}{2}(\|z_1\| + \|z_2\|) \left\| \frac{z_1}{\|z_1\|} + \frac{z_2}{\|z_2\|} \right\|$

85. Si  $\|z_1\| \leq 1$  y  $\|z_2\| \leq 1$  Probar que  $\left\| \frac{z_1-z_2}{1-z_1 z_2} \right\| \leq 1$ . ¿En que caso se cumple la igualdad?

86. Demostrar que:  $\frac{\|z+w\|}{1+\|z+w\|} \leq \frac{\|z\|}{1+\|z\|} + \frac{\|w\|}{1+\|w\|}$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$

87. Demostrar que:  $\forall z \in \mathbb{C}$ , se tiene:  $\|e^z-1\| \leq e^{\|z\|} - 1 \leq \|z\| e^{\|z\|}$

88. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , tal que  $\operatorname{Im}(z) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(w) > 0$ . Probar que  $\left\| \frac{z-w}{z+w} \right\| < 1$

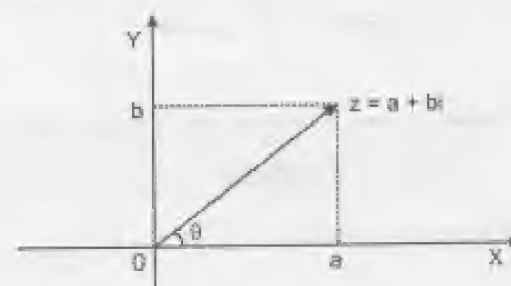
Números Complejos

43

## 1.16. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO.-

Sea  $z = a + bi$ , un número complejo distinto de cero, entonces el módulo de  $z$  es

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$



Denotaremos por  $\theta$  el ángulo formado por el segmento orientado que representa al número complejo  $z$ , con el eje X, en sentido antihorario.

Luego del gráfico se tiene: 
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}, \text{ de donde } \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

Como  $z = a + bi$ , al reemplazar  $a$  y  $b$  se tiene:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Que se llamado forma trigonométrica o forma polar del número complejo  $z$ .



98

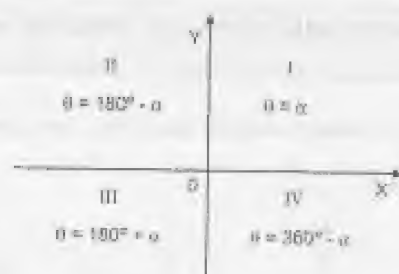
Sean  $a$  y  $b$  dos constantes complejas. Si  $b \neq 0$ , probar que  $a + \bar{a} + b\bar{z} + \bar{b}z = 0$  es la ecuación de una recta, donde  $z$  es una variable compleja.

99

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres constantes complejas,  $z$  una variable compleja probar que  $a + \bar{a} + b\bar{z} + \bar{b}z + (c - \bar{c})z\bar{z} = 0$  es la ecuación de una circunferencia.

100

Si  $\|a_i\| < 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  probar que  $\|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n\| < 1$



**Ejemplo.-** Expresar  $z = 1 + \sqrt{3}i$  en forma trigonométrica o polar.

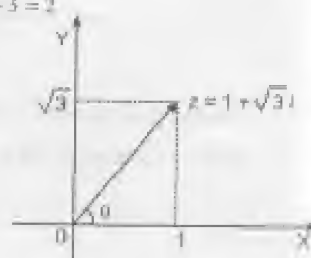
#### Desarrollo

Calculamos su módulo y su argumento:  $r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$z = 1 + \sqrt{3}i = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$$



**Ejemplo.-** Expresar  $z = -3 + \sqrt{3}i$  en forma trigonométrica o polar

#### Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento:  $r = \|z\| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = |Z| = 2\sqrt{3}$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) \text{ de donde } \theta \in 2do. \text{ cuadrante.}$$

$$\text{Es decir } \theta = 180^\circ - \alpha, \text{ donde } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{ii) Para } n = h, (a + bi)^h = r^h (\cosh \theta + i \operatorname{senh} \theta)$$

$$\text{iii) Para } n = h+1,$$

$$\begin{aligned} (a + bi)^{h+1} &= (a + bi)^h (a + bi) = r^h (\cosh \theta + i \operatorname{senh} \theta) r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= r^{h+1} (\cos(h\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(h\theta + \theta)) = r^{h+1} (\cos(h+1)\theta + i \operatorname{sen}(h+1)\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la fórmula para todo entero positivo  $n$ .

**Ejemplo.-** Calcular  $(1 + \sqrt{3}i)^7$

#### Desarrollo

$$z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{1+3} = 2 \text{ y } \theta = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^7 = 2^7 \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{3}\right) = 128 \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{3}\right)$$

Al ángulo  $\theta$  se le llama argumento de  $z$  y  $r = \|z\|$  es el módulo de  $z$  que denotaremos por:

$$\theta = \arg(z), \quad r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{por lo tanto: } z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ y } \theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

### 1.17. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.-

Sean  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  y  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

Dos números complejos en su forma trigonométrica, entonces:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Si  $z_2 \neq (0,0)$  y  $r_2 \neq (0,0)$ , entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

**Ejemplo.-** Si  $z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$  y  $z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$

$$\text{Entonces } Z_1 Z_2 = (3)(4)[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})] = 12(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})}{4(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})} = \frac{3}{4} [\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})] = \frac{3}{4} (\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$$

### 1.18. POTENCIAS Y RAICES DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

#### TEOREMA (FÓRMULA DE MOIVRE)

Para todo  $z = a + bi$  y todo entero positivo  $n$  se cumple la siguiente relación:

$$(a + bi)^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Llamada fórmula de MOIVRE

#### Demostración

La demostración lo haremos por inducción

i) Para  $n = 1$ ,  $a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

$$\text{Como } w = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \text{ se tiene: } w = r^{1/n} [\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n}]$$

como  $w$  es la raíz  $n$ -ésima de  $z$ , se tiene:

$$z^{1/n} = r^{1/n} [\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n}] \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

**Ejemplo.-** Hallar las raíces de  $(-4 + 4i)^{1/3}$

#### Desarrollo

Calculando su módulo y su argumento

$$z = -4 + 4i \Rightarrow r = \|z\| = 4\sqrt{2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{4}{-4}\right) \Rightarrow \theta \in 2do. \text{ cuadrante}$$

$$\text{Luego } \theta = 180^\circ - \alpha, \text{ donde } \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{Por lo tanto } \theta = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ$$



**TEOREMA.-** Si  $z = a + bi$  es un número complejo y  $n$  es un entero positivo. La raíz  $n$ -ésima de  $z$  es:

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] \text{ para valores de } k = 0, 1, \dots, n-1$$

#### Demostración

Sea  $w = x + iy$ , la raíz  $n$ -ésima de  $z$

Es decir:  $w^n = z$  pero como  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ;  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$(x + iy)^n = a + bi$ , reemplazando se tiene:  $\rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

de donde  $\rho^n = r$ ,  $n\alpha = \theta + 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Luego  $\rho = r^{1/n}$ ,  $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

**TEOREMA.-** Sea  $z = a + bi$ , definimos  $z^{\frac{m}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^m$ , para  $m$  y  $n$  enteros positivos, donde  $m$  y  $n$  son primos entre sí, se cumple la relación:

Siguiente: 
$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \left[ \cos \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) + i \sin \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right]$$

siendo  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\theta = \arctg(\frac{b}{a})$

**Ejemplo.-** Efectuar la operación:  $(1 + \sqrt{3}i)^{5/6}$

#### Desarrollo

Calculamos:  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\theta = \arctg(\frac{b}{a})$

$$r = \sqrt{1+3}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^{5/6} = 2^{5/6} \left[ \cos \frac{5}{6} \left( \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \frac{5}{6} \left( \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

para  $k = 0$ ,  $w_1 = 2^{5/6} (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$

$k = 1$ ,  $w_2 = 2^{5/6} (\cos 350^\circ + i \sin 350^\circ)$

$k = 2$ ,  $w_3 = 2^{5/6} (\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ)$

$k = 3$ ,  $w_4 = 2^{5/6} (\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ)$

$k = 4$ ,  $w_5 = 2^{5/6} (\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ)$

$k = 5$ ,  $w_6 = 2^{5/6} (\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$

$$\begin{aligned} (-4 + 4i)^{1/3} &= (4\sqrt{2})^{1/3} \left[ \cos \frac{135^\circ + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{135^\circ + 2k\pi}{3} \right] \\ &= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{135^\circ + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{135^\circ + 2k\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

para  $k = 0$ ,  $w_1 = \sqrt[3]{2} (\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ)$

$k = 1$ ,  $w_2 = \sqrt[3]{2} (\cos 99^\circ + i \sin 99^\circ)$

$k = 2$ ,  $w_3 = \sqrt[3]{2} (\cos 171^\circ + i \sin 171^\circ)$

$k = 3$ ,  $w_4 = \sqrt[3]{2} (\cos 243^\circ + i \sin 243^\circ)$

$k = 4$ ,  $w_5 = \sqrt[3]{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

### L19. EXPONENCIALES COMPLEJOS (FÓRMULA DE EULER).

Por el momento admitiremos la definición de la exponencial real:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

que más adelante demostraremos, en dicha expresión observamos que:

$$e^0 = 1, \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

Definimos la exponencial compleja por:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  ( $e$ : número de Euler) que es llamado la fórmula de Euler.

Si  $z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Cuando  $y = 0$ ,  $e^x = e^x$  se obtiene la función exponencial real.

Cuando  $x = 0$ ,  $e^{iy} = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ , se obtiene la fórmula de Euler.

**PROPIEDADES.-** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$

$P_1$ ,  $e^{z+w} = e^z e^w$

$P_2$ ,  $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

$P_3$ , Si  $e^z = 1 \Rightarrow z = 2\pi i n$ ,  $n$  es un entero.

$P_4$ ,  $(e^z)^n = e^{nz}$ ,  $n$  es un entero

Si en la fórmula de Euler sustituimos  $x$  por  $-x$ , es decir:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$  se obtiene:  $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$

de donde:  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Luego: 
$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \quad \text{Sumando}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \text{ ósea que: } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

en forma similar para el  $\sin x$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \text{ restando se tiene:}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x, \text{ de donde } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

### L20. LOGARITMO EN $\mathbb{C}$ .

La exponencial compleja  $z = re^{i\theta}$  es un número complejo, el valor de  $\theta$  se denomina argumento principal de  $z$ ; que denotaremos por:  $\theta = \arg(z)$

Para todo complejo  $z \neq 0$ , le corresponde solamente un valor de  $\theta$  con  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Sin embargo cualquier otro intervalo de longitud  $2\pi$  por ejemplo  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  se puede emplear.

El logaritmo complejo es la inversa de la exponencial compleja, es decir:

Si  $z = re^{i\theta}$  es un número complejo  $\Rightarrow \exists w \in \mathbb{C}$  único tal que  $r = |z|$  y  $\theta = \arg(z)$

Estas fórmulas sirven para el estudio de las funciones trigonométricas.

Si  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  entonces  $z = re^{i\theta}$  es la fórmula exponencial del complejo, donde  $r = \|z\|$  y  $\theta$  se denomina argumento de  $z$  que es denotado por  $\theta = \arg(z)$ .

**Ejemplo.-** Si  $z = e^{i\theta} \Rightarrow \|z\| = 1$

#### Desarrollo

Como  $z = e^{i\theta} \Rightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta$  de donde

$$\|z\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \Rightarrow \|z\| = 1$$

**Ejemplo.-** Probar que:  $e^{\frac{\pi}{2}} = i$

#### Desarrollo

$$e^{\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i \quad \therefore e^{\frac{\pi}{2}} = i$$

Generalizando se tiene:

$$\ln z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

El valor principal de  $\ln z$  es el que se obtiene cuando  $k = 0$ , es decir: V.P. de  $\ln z = \ln r + i\theta$

**Ejemplo.-** Hallar  $\ln z$ , donde  $z = 1 - i$

#### Desarrollo

$$z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\ln z = \ln(1 - i) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{7}{4} + 2k\right)\pi$$

$$\text{y el V.P. de } \ln z = \ln \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$$

### 1.21. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL.

Sean  $z_1$  y  $z_2$  donde  $z_1 \neq 0$ , entonces consideremos la exponencial compleja  $w = z_1^{z_2}$ , aplicando logaritmos en base natural se tiene:

$$\ln w = \ln z_1^{z_2} = z_2 \ln z_1, \text{ y por definición se tiene: } w = e^{z_2 \ln z_1}$$

### 1.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.

1) Obtener la forma polar o trigonométrica de los siguientes números complejos.

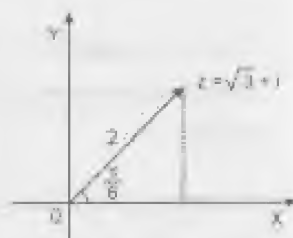
a)  $z = \sqrt{3} + i$

#### Desarrollo

Sea  $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Donde  $r = \|z\| = 2$  y  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$



b)  $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

#### Desarrollo

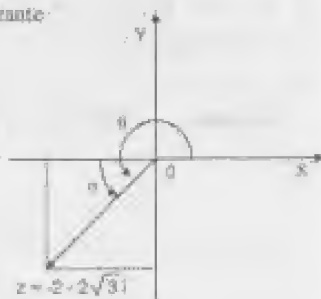
$r = \|z\| = 4$  y  $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow \theta \in 3er \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Luego  $\theta = 180^\circ + \frac{\pi}{3} = 240^\circ$

Como  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = 4(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$



c)  $z = -1 - i$

#### Desarrollo

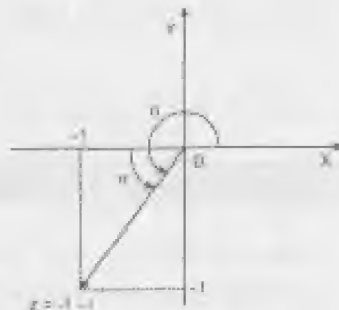
$z = -1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} \Rightarrow \theta \in 3er \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Luego  $\theta = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  entonces  $z = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$



d)  $z = -4i$

#### Desarrollo

$r = \|z\| = 4$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-4}{0} \Rightarrow \theta = 270^\circ$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = 4(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$



2) Calcular las potencias indicadas

a)  $(1 - i)^5$

#### Desarrollo

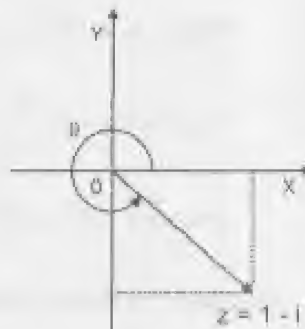
Sea  $z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta \in 4to \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Luego  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$$(1 - i)^5 = r^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{35\pi}{4} + i \sin \frac{35\pi}{4} \right)$$



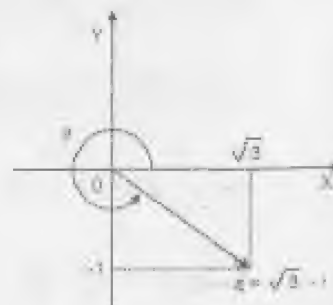
b)  $(\sqrt{3} - i)^6$

#### Desarrollo

Sea  $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow r = \|z\| = 2$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in 4to \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$



Luego  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$$(\sqrt{3} - i)^6 = r^6 (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 64(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$$

$$(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = r^{\frac{1}{8}} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{8} \right) \text{ donde } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{8}} = (256)^{\frac{1}{8}} \left( \cos \frac{2\pi + 6k\pi}{24} + i \sin \frac{2\pi + 6k\pi}{24} \right)$$



c)  $(-1 + \sqrt{3}i)^7$

**Desarrollo**

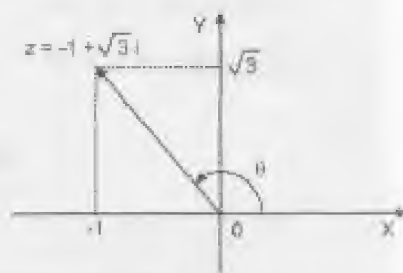
Sea  $z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r = \|z\| = 2$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta \in 2^{\text{do}} \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Luego  $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$(-1 + \sqrt{3}i)^7 = 128(\cos \frac{14\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{14\pi}{3})$



3) Efectuar las operaciones indicadas.

a)  $(-128 + 128\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}}$

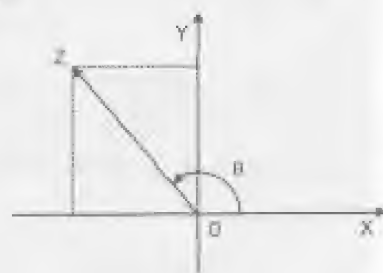
**Desarrollo**

Sea  $z = -128 + 128\sqrt{3}i \Rightarrow r = \|z\| = 256$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{128\sqrt{3}}{-128} \Rightarrow \theta \in 2^{\text{do}} \text{ cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

Luego  $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



Luego  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{3})$

$(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos \frac{11\pi + 12k\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi + 12k\pi}{18})$

para  $k = 0, w_1 = 2(\cos \frac{11\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{18})$

$k = 1, w_2 = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6})$

$k = 2, w_3 = 2(\cos \frac{35\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{35\pi}{18})$

4) Demostrar que:  $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4})$

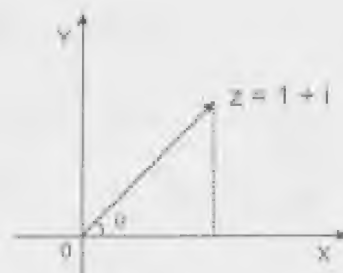
**Desarrollo**

Sea  $z = 1 + i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$(1+i)^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4})$



5) Demostrar que:  $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos \frac{n\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6})$

**Desarrollo**

para  $k = 0, w_1 = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12})$

$k = 1, w_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$

$k = 2, w_3 = 2(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12})$

$k = 3, w_4 = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6})$

$k = 4, w_5 = 2(\cos \frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{12})$

$k = 5, w_6 = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3})$

$k = 6, w_7 = 2(\cos \frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12})$

$k = 7, w_8 = 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6})$

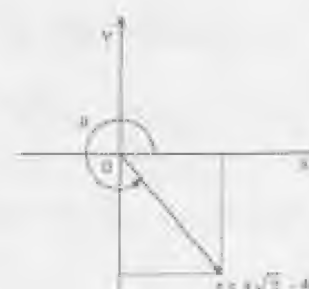
b)  $(4\sqrt{3} - 4i)^{\frac{1}{3}}$

**Desarrollo**

Sea  $z = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow r = \|z\| = 8$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-4}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in 4^{\text{to}} \text{ Cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$



**Números Complejos**

Sea  $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow r = \|z\| = 2$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \in 4^{\text{to}} \text{ Cuadrante}$

Sea  $\alpha / \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Luego  $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$  o  $\theta = -\frac{\pi}{6}$

$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = 2^n[\cos(\frac{n\pi}{6}) + i \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{6})] = 2^n[\cos \frac{n\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}]$

6) Calcular  $(1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n$

**Desarrollo**

$1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})$

$(1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = [2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2})]^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{n\alpha}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2})$

7) Demostrar que: Si  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ , Entonces  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta)$

**Desarrollo**

Si  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta ; \frac{1}{z} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$

aplicando MOIVRE se tiene:  $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$

$\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$  Sumando

$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$

8 Usando la fórmula de MOIYRE, demostrar las siguientes fórmulas:

a)  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - \sin^2 x$  ;  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

**Desarrollo**

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^2 &= \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + i(2 \cos x \sin x) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

de (1) y (2) se tiene:  $\cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + i(2 \cos x \sin x)$

De donde:  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - \sin^2 x$  ;  $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

b)  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  ;  $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

**Desarrollo**

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

de (1) y (2) se tiene:

$$\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

de donde por igualdad se tiene:  $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$  ;

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

9 Desarrollar  $\cos^3 \theta$  en términos de  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$  de múltiplos de  $\theta$

**Desarrollo**

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = 8 \cos^3 \theta$$

$$8 \cos^3 \theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{3}{z} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta$$

$$\cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}$$

10 Probar que:  $\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{16} (\sin 5\theta - \sin 3\theta - 2 \sin \theta)$

**Desarrollo**

$$(2i \sin \theta)^3 (2 \cos \theta)^2 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \left(z^3 - \frac{3}{z}\right) - \left(z^3 - \frac{1}{z}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$32i \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2i \sin 5\theta - 2i \sin 3\theta - 4i \sin \theta$$

$$\sin^3 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{16} (\sin 5\theta - \sin 3\theta - 2 \sin \theta)$$

11 Demostrar que la raíz cuadrada de  $z = a + bi$  es el complejo  $x + iy$ , donde:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}}$$

**Desarrollo**

Si  $x + iy$  es la raíz cuadrada de  $z = a + bi \Rightarrow (x + iy)^2 = a + bi$ , aplicando módulos

$\|x + iy\|^2 = \|a + bi\|$  y por definición se tiene:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ es decir } x^2 + y^2 = \|z\| \quad \dots (1)$$

Como  $(x + iy)^2 = a + bi$ , desarrollando  $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$ , por igualdad

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \dots (2) \\ 2xy = b & \dots (3) \end{cases} \text{ sumando y restando (1) y (2)}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \|z\| \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \|z\| + a \\ 2y^2 = \|z\| - a \end{cases} \text{ de donde } x = \pm \sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}}$$

Aquí se obtiene cuatro pares de miembros reales, de los cuales seleccionamos dos de la ecuación (3).

Si  $b > 0 \Rightarrow x, y$  se eligen con el mismo signo

Si  $b < 0 \Rightarrow x, y$  se eligen con distinto signo.

12 Resolver la ecuación en  $\mathbb{C}$ :  $z^2 = 2i$

**Desarrollo**

Resolver esta ecuación es equivalente a sacar la raíz cuadrada.

Luego  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $\|z\| = 2$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2+0}{2}} = \pm 1 \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2-0}{2}} = \pm 1$$

como  $b > 0 \Rightarrow z = \sqrt{2i} = x + iy = \pm(1 + i)$

13 Resolver la ecuación  $z^2 = -3 - 4i$

**Desarrollo**

Como  $\|z\| = \sqrt{9+16} = 5$ ,  $a = -3$ ,  $b = -4$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\|z\| + a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 1 \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\|z\| - a}{2}} = \pm \sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm 2$$

Como  $b < 0$ ,  $x$  e  $y$  se eligen con signo distinto, es decir  $(1, -2)$ ,  $(-1, 2)$

Luego,  $z = \sqrt{-3-4i} = \pm(1 - 2i)$

14 Escribir las expresiones siguientes en la forma:  $a + bi$

a)  $e^{i\frac{\pi}{4}}$

b)  $e^{i\frac{\pi}{4}}$

**Desarrollo**

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})]$$

$$= e[\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}] = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}e}{2}(1 - i)$$

15 Si  $z = 6e^{\frac{\pi}{3}}$ , Hallar el valor numérico de  $|e^z|$

**Desarrollo**

Como  $z = 6e^{\frac{\pi}{3}} = 6[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}] = 3 + 3\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z = -3\sqrt{3} + 3i, \text{ de donde } e^z = e^{-3\sqrt{3} + 3i} = e^{-3\sqrt{3}}(\cos 3 + i \sin 3)$$

$$|e^z| = e^{-3\sqrt{3}}$$

16 Si  $z = x + iy$ , Hallar el lugar geométrico  $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$

**Desarrollo**

Se conoce  $\arg(z) = 0 \Rightarrow \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$

Si  $z = x + iy \Rightarrow z + 1 = x + 1 + iy$

$$\arg(z+1) = \arctan \frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3}, \text{ de donde } \frac{y}{x+1} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}(x+1)$$



$$e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \rho \left[ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = \rho \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Si } z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\arg(z^2) = \arctg\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2} = \lg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2xy$$

18) Demostrar que:  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

## Desarrollo

$$T = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx; \quad S = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$$

$$\text{Sea } \alpha = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}, \text{ luego}$$

$$\alpha^2 = \cos x + i \sin x; \quad \alpha^4 = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$\alpha^{2n} = \cos nx + i \sin nx, \text{ entonces}$$

$$S + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2n} = \alpha^2 \left( \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} \right) = \alpha^2 \alpha^n \frac{(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})}$$

$$= \alpha^{n+1} \left( \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}} \right), \text{ donde } \alpha^{n+1} = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

$$\alpha^n = \cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}$$

$$\alpha^{-n} = \cos \frac{nx}{2} - i \sin \frac{nx}{2}, \text{ por tanto } S + iT = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\therefore \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

## Números Complejos

19) Calcular

a)  $\ln i^{\frac{1}{2}}$

## Desarrollo

Se conoce que:  $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$  donde

$$r = \|z\| = 1 \quad y \quad \theta = \arg(z) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\ln i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln i = \frac{1}{2} (\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) \Rightarrow \ln i^{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2} (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

b)  $\ln(1+i)$

## Desarrollo

$$Z = 1+i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

$$\ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

20) Resolver la ecuación  $x^{2i} - 2x^i + 2 = 0$

## Desarrollo

$$x^i = \frac{2 + \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \quad \text{de donde se obtiene } x^i = 1+i \vee x^i = 1-i$$

$$\text{aplicando logaritmo se tiene: } i \ln x = \ln(1+i) \quad \vee \quad i \ln x = \ln(1-i)$$

$$i \ln x = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad \vee \quad i \ln x = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\ln x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \sqrt{2} \quad \vee \quad \ln x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \sqrt{2}$$

$$x = e^{\frac{\pi}{4} - i \ln 2} \quad \vee \quad x = e^{\frac{7\pi}{4} - i \ln 2} \quad \text{donde } k = 0$$

## 1.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1) Calcular  $z^4$  siendo: a)  $z = \frac{a}{\sin \alpha - i \cos \alpha}, a \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

b)  $z = (-\sqrt{3} + i)^{-1}$  c)  $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

2) Sabiendo que  $n = 3k$  demostrar que:  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$

3) Efectuar las operaciones siguientes:

a)  $(-1+i)^8$  b)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{10}$  c)  $(1+\sqrt{3}i)^7$

d)  $(2+2i)^{-4}$  e)  $(1+i)^{-8}$  f)  $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^5$

4) Calcular las potencias indicadas:

a)  $(2-2i)^7$  b)  $(\sqrt{3}-3i)^8$  c)  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{40}$

d)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$  e)  $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^8$  f)  $\left(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right)^8$

5) Determinar la forma polar de:

a)  $z = \frac{2}{1-i}$  b)  $z = \frac{1}{1+i}$  c)  $z = \frac{1}{1-\sqrt{3}i}$

## Números Complejos

9) Demostrar que  $\left(\frac{1+ig\theta}{1-ig\theta}\right)^n = \frac{1+ig(n\theta)}{1-ig(n\theta)}$

10) Calcular las raíces siguientes:

a)  $\sqrt[3]{1-i}$  b)  $\sqrt[3]{-i}$  c)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$  d)  $\sqrt[3]{-4}$

e)  $\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}i}$  f)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$  g)  $\sqrt[3]{2+i}$  h)  $\sqrt[3]{1+i}$

11) Calcular las raíces siguientes:

a)  $\sqrt[3]{16-16\sqrt{3}i}$  b)  $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$  c)  $\sqrt[3]{8-5\sqrt{3}i}$

d)  $(16\sqrt{2} + \frac{32}{\sqrt{2}}i)^{\frac{1}{5}}$  e)  $\sqrt[3]{-i}$  f)  $\sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})}$

12) Demostrar que si  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 1$  entonces  $(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = 1$

13) Calcular las potencias indicadas:

a)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$  b)  $(\sqrt{3}+i)^8$  c)  $\sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$

d)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{16}$  e)  $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{30}}$  f)  $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{30}}$

6. Usar la forma polar de un número complejo para demostrar que:
- a)  $(1+3i)^{-10} = 2^{-10}(-1+i\sqrt{3})$       b)  $(-1+i)^2 = -9(1+i)$
7. Si  $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ , hallar  $(1+w)^n$
8. Si  $u_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , hallar  $u_1^n + w_2^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

9.  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}$       h)  $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^8$       i)  $(1+i)^{25}$
14. Calcular las raíces siguientes:
- a)  $\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$       b)  $\sqrt[3]{-1-i}$       c)  $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$
15. Simplificar la expresión:  $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n + (1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$
16. Hallar las raíces cúbicas de  $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ , reduciendo a su mínima expresión.

17. Simplificar  $E = \frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^6 (\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^7}{(\sin \theta + i \cos \theta)^6 (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^2}$
18. Hallar el valor numérico de  $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$
19. Demuestre que  $(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} - i \sin \frac{n\theta}{2}\right)$
20. Hallar el valor de  $E = \frac{12(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)}{[3(\cos 44^\circ + i \sin 44^\circ)][2(\cos 62^\circ + i \sin 62^\circ)]}$
21. Simplificar  $(1+ig\theta)^n + (1-ig\theta)^n$  y de ahí evaluar  $(1+ig\frac{\pi}{8})^8$
22. Hallar todos los valores de las raíces de las siguientes expresiones.
- a)  $\sqrt{21i-20}$       b)  $(4\sqrt{2}+i4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$       c)  $\sqrt[3]{3+4i}$
23. Si  $z = 1+i$ ,  $w = 1-i$ , calcular  $\left(\frac{z}{w}\right)^4$
24. Si  $z = \frac{5+5i}{10\sqrt{2}+10i}$ , calcular  $z^{100}$
25. Simplificar  $p = \frac{(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(1-i\cos\theta+\sin\theta)^{4n}}$
26. Expresar el siguiente número complejo en su forma polar.
- $$z = 1-i + \frac{3-4i}{1-\sqrt{3}i + \frac{(3+\sqrt{3})-(1+3\sqrt{3})i}{3-i}}$$
27. Calcular las siguientes raíces:
- a)  $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$       b)  $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$       c)  $(1+5i)^{\frac{5}{6}}$       d)  $(-2i)^{\frac{2}{3}}$

28. Si  $w = \frac{kz-1}{z+k}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq \pm 1$ , verificar que  $\|z\|=1 \Rightarrow \|w\|=1$  y si  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ , calcular  $\arg(w)$
29. Sabiendo que  $z = \cos\theta + i\sin\theta$  y que  $n+i = (z^2+1)$ , probar que:  $v = n \operatorname{Arg}\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ ,  $u^2 + v^2 = 16 \cos^2 \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}$
30. Sea  $z = x_n + iy_n = w^n$ ,  $w = 1 + \sqrt{3}i$ , verificar que:  $x_{n-1}y_n = x_n y_{n-1} = 4^{n-1} \sqrt{3}$
31. Sea  $F(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$ , verificar que:  $F(n+4) = -F(n)$
32. Si  $F(n) = A(24-7i)^n + B(24+7i)^n$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 14$ . Calcular A, B y  $F(3)$ .
33. Resolver la ecuación para  $\theta$ :  $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \dots (\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$
34. Resolver para  $n$  entero positivo  $\left(\frac{3+z}{1+i}\right)^n = (3-z)^n$
35. Hallar todas las raíces de  $(1+z)^5 = (1-z)^5$
36. Demostremos las raíces de la ecuación  $(z+1)^5 + z^5 = 0$  por  $z_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Determinar  $\operatorname{Re}(z_k)$ ,  $\operatorname{Im}(z_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .
37. Demostrar que si  $A \in \mathbb{C}$ ,  $\|A\|=1$ , entonces la ecuación  $\left(\frac{1+Az}{1-z}\right)^n = A$ , tiene todas las raíces reales y distintas.
38. Calcular todas las raíces de las siguientes ecuaciones:
- a)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$       b)  $z^4 - 81 = 0$       c)  $z^5 + 1 = -\sqrt{3}i$
- d)  $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$       e)  $(z-2i)^3 = -1+i$       f)  $z^6 = 1+i$
39. Resolver la ecuación  $z^5 - 1 = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , y representar sus raíces en el círculo respectivo.

40. Hallar la solución de la ecuación:  $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$
41. Resolver las siguientes ecuaciones:
- a)  $z^2 + 9 = 0$       b)  $z^2 - 2z + 2 = 0$       c)  $z^2 + 2z + 5 = 0$
- d)  $z^2 + 1 = 0$       e)  $z^3 + 1 = 0$       f)  $z^5 - 1 = 0$
42. Si  $z = 1+i$ ,  $w = 1 + \sqrt{3}i$ ,  $u = \sqrt{3}-i$ , hallar  $\arg(zwu)$
43. Hallar todos los números complejos  $z \neq 0$  tal que  $z^2 = \bar{z}$ ,  $\bar{z} = z^3$
44. Resolver la ecuación  $z^2 + (2i-3)z - 5-i = 0$
45. Sea  $z = x + iy$ , tal que  $z^{30} = 1$ ,  $z \neq 1$ . Hallar  $\operatorname{Re}(z + z^2 + \dots + z^{29})$
46. Si  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ,  $z^n = 1$ ,  $z \neq 1$  y  $M = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ , hallar  $\operatorname{Re}(M)$  y  $\operatorname{Im}(M)$

53. Si  $z = x + iy$ , hallar la ecuación del lugar geométrico definido por  $\arg(z+2i) = \frac{\pi}{6}$
54. Si  $h, c, w$  y  $A$  son números reales y  $z = x + iy$  es una solución  $z^4 + hz^2 + cz = Ae^{i\omega t}$ , pruebe que  $x = \operatorname{Re}(z)$  es una solución de  $x^4 + hx^2 + cx = A \cos \omega t$  y  $y = \operatorname{Im}(z)$  es una solución de  $y^4 + hy^2 + cy = A \sin \omega t$
55. Si  $p, m \in \mathbb{R}$ , verificar que:  $w^{2m \operatorname{Arg} p} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^m = 1$
56. Probar que  $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$ , donde  $r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$  y  $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2}\right)$
57. Demostrar que:
- a)  $e^{2\pi i} = 1$       b)  $e^{i2\pi} = -1$       c)  $e^{2+2\pi i} = -e^2$



Si  $z = \sqrt{2}(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$  donde  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha = \arctg 3$ , hallar  $z$ .

48. Expresar en la forma binómica:  $z = \frac{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(1 - i \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n}{1 - i \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$

49. Si  $\frac{1}{z - ic} = \frac{1}{a + ib} - \frac{1}{a + ic}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq c$ . Calcular  $\|z\|^2$ .

50. Si  $z = x + iy$ , describir el lugar geométrico y graficarlo:  $\arg\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \frac{\pi}{6}$ .

51. Si  $z = x + iy$ , hallar las ecuaciones del lugar geométrico definido por:

a)  $\arg\left(\frac{z+2}{z}\right) = \frac{\pi}{4}$       b)  $\arg\left(\frac{z-1}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2}$

52. Demostrar que:  $\arg\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $\|z_1\| = \|z_2\|$ .

61. Usar la progresión  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$ , para probar que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

62. Para  $n = 2, 3, 4, \dots$  probar que:  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

63. Hallar una fórmula reducida para:

a)  $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x$       b)  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen}(n-1)x$   
c)  $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x$       d)  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen}(2n-1)x$

64. Hallar la suma:  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \dots + \operatorname{sen}^2(2n-1)x$ .

65. Hallar las siguientes sumas:

a)  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx$       b)  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \dots + \operatorname{sen}^2 nx$

66. Hallar las siguientes sumas:

a)  $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx$   
b)  $\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{sen} 3x + \dots + n \operatorname{sen} nx$

67. Sean  $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ , las raíces de la ecuación  $z^{n+1} - 1 = 0$ ,  $n \geq 1$ , calcular  $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n+1}$ , y demostrar que:

$$\frac{\cos 2\pi}{n} + \frac{\cos 4\pi}{n} + \frac{\cos 6\pi}{n} + \frac{\cos 8\pi}{n} + \dots + \frac{\cos 2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{6\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{8\pi}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

68. Demostrar que:  $1 + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 3\theta + \dots = \frac{4 - 2 \cos \theta}{3 - 4 \cos \theta}$ .

79. Determinar los valores principales de las expresiones siguientes:

a)  $z = \sqrt{2} - i$       b)  $z = (1 - i\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$       c)  $z = (3i)^{\frac{5}{2}}$

80. Calcular: a)  $\left[\frac{1}{2}e^{-1-2i}\right]^{i\pi}$       b)  $(1-i)^{1-i}$

c)  $(1-i)^{-i}$       d)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{-i}$

81. Calcular: a)  $\ln(-i)$       b)  $\ln i$

d)  $e^{\frac{\pi}{2}} = i$       e)  $e^{-2\pi i} = -e^2$       f)  $\frac{e^{2\pi}}{e^{i\pi}} = e^{(2-i)\pi}$

58. Si  $z = re^{i\theta}$ , Demostrar que:  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ .

59. Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma  $x + iy$ .

a)  $3e^{\frac{\pi}{3}} - 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}}$       b)  $5e^{\frac{2\pi}{3}} - 4e^{\frac{5\pi}{6}}$       c)  $2e^{\frac{5\pi}{6}} - 3e^{\frac{7\pi}{6}}$

d)  $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - \sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}}$       e)  $\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{3e^{\frac{5\pi}{6}}}$       f)  $\frac{7e^{i\theta}}{3e^{i\theta}}$

60. Demostrar que  $z = a + bi$  es una solución de la ecuación

$$z^3 - 4(a + b)z^2 + 5(a^2 + b^2 + 2ab)z - 2(a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)) = 0$$

69. Si  $z = 6e^{\frac{\pi}{3}}$ , hallar el valor de  $\|e^z\|$ .

70. Demostrar que:  $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

71. Hallar a)  $\operatorname{Re}(e^{e^z})$       b)  $\operatorname{Im}(e^{e^z})$

72. Hallar  $z$ , tal que  $\|e^z\| < 1$ .

73. Aplicando la fórmula de Moivre expresar las potencias de  $\operatorname{sen} \theta$  y  $\cos \theta$  las siguientes funciones de ángulos múltiples.

a)  $\operatorname{sen} 4\theta$       b)  $\cos 4\theta$       c)  $\operatorname{sen} 5\theta$       d)  $\cos 5\theta$       e)  $\operatorname{sen} 6\theta$       f)  $\cos 6\theta$

74. Si  $e^z = \cos z + i \operatorname{sen} z$ , Demuéstrese que:

a)  $\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$       b)  $\operatorname{sen} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$

75. Verificar que:

a)  $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$       b)  $\cosh(iz) = \cos z$       c)  $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$   
d)  $\cos(iz) = \cosh z$       e)  $i \operatorname{tgh} z = \operatorname{tg}(iz)$       f)  $\operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{ctgh} z$

76. Demuéstrese que:

a)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$       b)  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

77. Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $e^{2z-4} = 1$       b)  $e^z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$       c)  $e^z = e^{\operatorname{sen} z}$

d)  $\ln z = 2 + \frac{\pi}{2}i$       e)  $\cos z = 1 - i$       f)  $\operatorname{sen} z = 2 + \frac{i}{4}$

78. Dado  $z = -1 - i + 2i\sqrt{2}$ , hallar  $\ln(\bar{z})$ .

83. Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $z^{20} - 2z^5 + 2 = 0$       b)  $x^{\frac{20}{21}} - x^{\frac{10}{7}} + 1 = 0$

89. Sea  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , Demostrar que:

a)  $r^n \cos n\theta = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 - \dots$

b)  $r^n \operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1}x^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots$

c)  $\ln(1+i)$

d)  $\ln(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

82) Si  $\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ,  $\sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$ . Demostrar que:

a)  $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$       b)  $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

83) Demostrar que:  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = -\frac{1}{2}$

84) Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Probar que:  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

85) Determinar todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

a)  $\cos z = 2$       b)  $\sin z = \cosh 4$       c)  $\cosh z = \frac{1}{2}$

d)  $\sinh z = i$       e)  $\cosh z = -2$

86) Determinar los valores principales de las expresiones siguientes:

a)  $w = (\sqrt{2}-i)^{i-1}$       b)  $w = (3i)^{2i}$       c)  $w = (1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

87) Obtener el valor principal de  $z$  en los siguientes casos:

a)  $(1-i)^7 = 1$       b)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^z = i$

## CAPÍTULO II

### 2. FUNCIONES ANALÍTICAS COMPLEJAS 0 FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA.-

Diversos problemas de Ingeniería pueden solucionarse mediante el método del análisis complejo, estos problemas pueden subdividirse en dos grandes clases:

La primera clase consiste de "problemas elementales" y para esto se requiere del conocimiento de los números complejos en el álgebra y el cálculo elemental por ejemplo se tiene muchas aplicaciones relacionados con los circuitos eléctricos y los sistemas mecánicos vibratorios, estos son los problemas de esta primera clase.

Para la segunda clase de problemas se necesita de un conocimiento detallado de las funciones analíticas complejas, los problemas abordados en esta segunda clase es en la teoría del calor, en dinámica de los fluidos y en electrostática.

La importancia de las funciones analíticas en las matemáticas de Ingeniería está en las tres raíces principales.

- 1° Las partes real e imaginaria de una función analítica son soluciones de la ecuación de Laplace en dos variables independientes, también los problemas bidimensionales de potencial pueden desarrollarse mediante métodos desarrollados en relación con las funciones analíticas.
- 2° Los integrales complicadas, reales y complejas que aparecen en las aplicaciones pueden resolverse por métodos de integración compleja.
- 3° Las funciones no elementales que aparecen en las matemáticas de Ingeniería son funciones analíticas que requieren de un conocimiento mucho más profundo y más detallado de sus propiedades.

Demostrar que:  $\left(\frac{1+\operatorname{sen} \theta+i \cos \theta}{1+\operatorname{sen} \theta-i \cos \theta}\right)^n = e^{i n \frac{\pi-2 \theta}{2}}$

### 2.1. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $z = x + iy$ , si  $x$  e  $y$  son variables reales entonces " $z$ " es una variable compleja.

b) **DEFINICIÓN.-** Sean  $C \neq \emptyset$ ,  $\|\cdot\|: C \times C \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , tal que:

i)  $\|z-w\| \geq 0$ ,  $\forall z, w \in C$  y  $\|z-w\| = 0 \Leftrightarrow z=w$

ii)  $\|z-w\| = \|w-z\|$ ,  $\forall z, w \in C$  (propiedad simétrica)

iii)  $\|z-w\| \leq \|z-u\| + \|u-w\|$ ,  $\forall z, u, w \in C$  (propiedad desigualdad triangular)

Entonces el par  $(C, \|\cdot\|)$  se llama "espacio métrico con la métrica  $\|\cdot\|$ ".

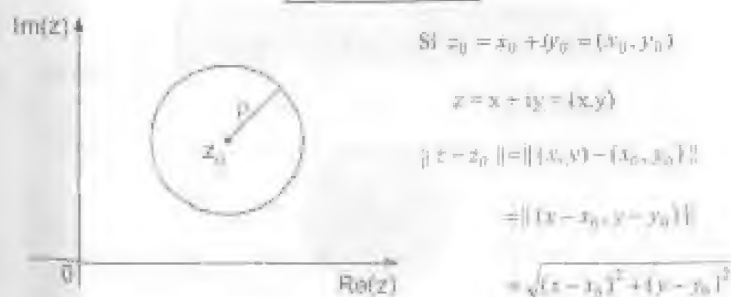
Si falta una de esas condiciones,  $(C, \|\cdot\|)$  no es espacio métrico.

c) **DEFINICIÓN.-** Un círculo de centro  $z_0 \in C$  y de radio  $\rho > 0$ , es el conjunto denotado y definido por:

$$C(z_0, \rho) = \{z \in C / \|z - z_0\| = \rho\}$$

también se expresa en la forma:

$$C = \{z = z_0 + \rho e^{i\theta}\}$$



$$C(z_0, \rho) = \{z \in C / \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \rho\} \text{ o también}$$

$$C(z_0, \rho) = \{z \in C / (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2\}$$

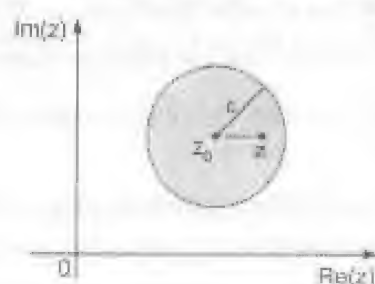
$$V_\rho(z_0) = V'(z_0, \rho) = \{z \in C / 0 < \|z - z_0\| < \rho\}$$

$\operatorname{Im}(z)$

d) **DEFINICIÓN.-** Si  $\varepsilon > 0$ , y  $z_0$  es un número complejo, llamaremos disco circular abierto (bola abierta) de centro  $z_0$  y radio  $\varepsilon > 0$ , al conjunto denotado y definido por:



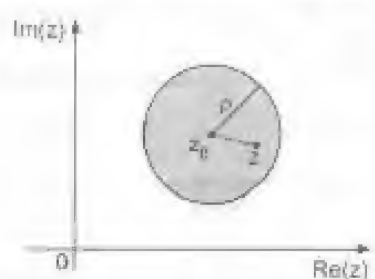
$$V_\rho(z_0) = V(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| < \rho\}$$



**OBSERVACIÓN.-** A todo disco circular abierto (bola abierta) se le llama vecindad de  $z_0$  y de radio  $\rho > 0$

e) **DEFINICIÓN.-** Si  $\rho > 0$ , y  $z_0$  es un número complejo, llamaremos disco circular cerrado (bola cerrada) de centro  $z_0$  y de radio  $\rho > 0$ , al conjunto denotado y definido por:

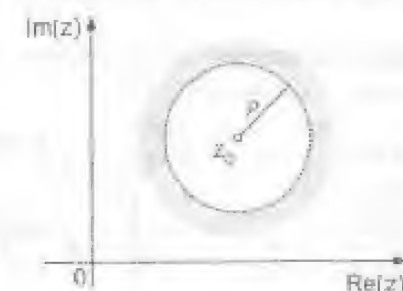
$$\bar{V}_\rho(z_0) = \bar{V}(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| \leq \rho\}$$



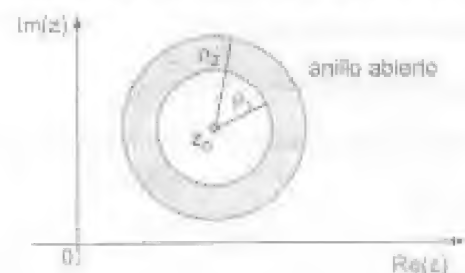
f) **DEFINICIÓN.-** Si  $\rho > 0$ , y  $z_0$  es un número complejo, llamaremos disco perforado (bola reducida) de centro  $z_0$  y de radio  $\rho > 0$ , al conjunto denotado y definido por:



g) **DEFINICIÓN.-** Si  $\rho > 0$ , y  $z_0$  es un número complejo, el conjunto definido por  $\{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| > \rho\}$  representa el exterior del círculo  $C(z_0, \rho)$



h) **DEFINICIÓN.-** Si  $\rho_1, \rho_2 > 0$ , con  $\rho_1 < \rho_2$  y  $z_0$  es un número complejo, el conjunto definido por:  $\{z \in \mathbb{C} / \rho_1 < \|z - z_0\| < \rho_2\}$  representa la región entre dos círculos concéntricos de radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente



## 2.2. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto  $S \subset \mathbb{C}$ ,  $S \neq \emptyset$  es abierto si y sólo si  $\forall z_0 \in S$ ,  $\exists \rho > 0$  tal que  $V_\rho(z_0) \subset S$ .



S es abierto, puesto que  $V_\rho(z_0) \subset S$       S no es abierto, puesto que  $V_\rho(z_0) \not\subset S$

b) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto  $S \subset \mathbb{C}$ ,  $S \neq \emptyset$  es cerrado si y sólo si su complemento es abierto ( $C_S = S^c =$  complemento de S)

**Ejemplo.-** El conjunto A definido por:  $A = \{z \in \mathbb{C} / \|z - 3\| \leq 3\}$  es un conjunto cerrado, pues  $A^c$  es abierto.



$A^c = \{z \in \mathbb{C} / \|z - 3\| > 3\}$  es abierto

**OBSERVACIÓN.-**

- ① Todo disco abierto es un conjunto abierto.
- ② Todo disco cerrado es un conjunto cerrado.
- ③ El único conjunto abierto y cerrado a la vez es el conjunto vacío  $\emptyset$ .
- ④  $V_\rho(z_0) \subset V_\rho(z_0)$
- ⑤  $V_\rho(z_0) = V_\rho(z_0) - \{z_0\}$

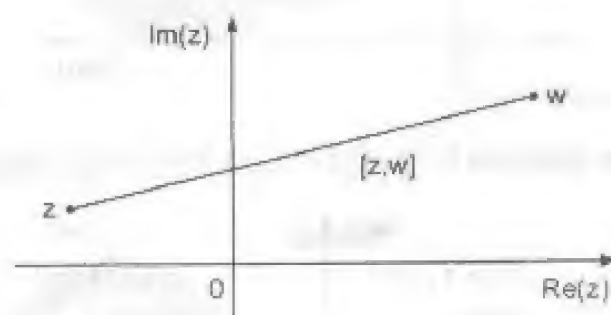
## 2.3. CONJUNTO CONEXO.-

A un segmento de recta de extremos  $z, w \in \mathbb{C}$ , denotaremos y definiremos por:

$$[z, w] = \{(1-t)z + tw / 0 \leq t \leq 1\}$$

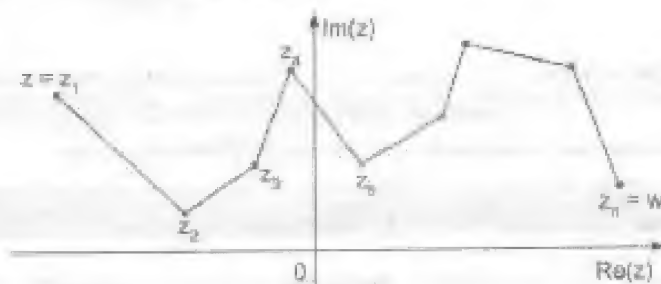
donde para  $t = 0$  se tiene el extremo inicial  $z$

$t = 1$  se tiene el extremo final  $w$



Una poligonal en  $\mathbb{C}$  es un conjunto de la forma:

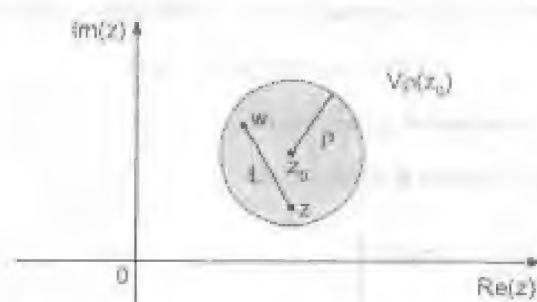
$$\bigcup_{j=1}^n [z_j, z_{j+1}], \text{ donde } z = z_1, \dots, z_n = w$$



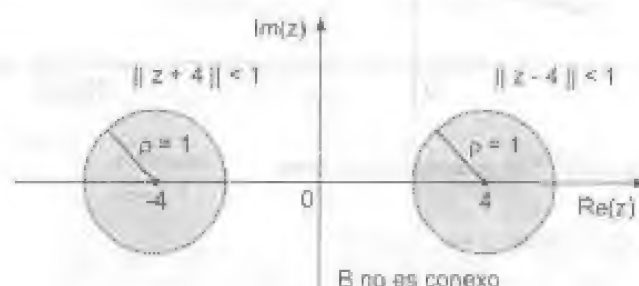
a) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto  $S \subset \mathbb{C}$ ,  $S \neq \emptyset$  es conexo si dos puntos  $z, w \in S$  pueden ser unidos mediante una poligonal íntegramente contenido en S.

Intuitivamente significa que S está constituido por una sola pieza.

**Ejemplo.-** El conjunto  $V_p(z_0) = \{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| < p\}$  es un conjunto conexo.



**Ejemplo.-** El conjunto  $B = \{z \in \mathbb{C} / \|z - 4\| < 1 \vee \|z + 4\| < 1\}$  es no conexo?



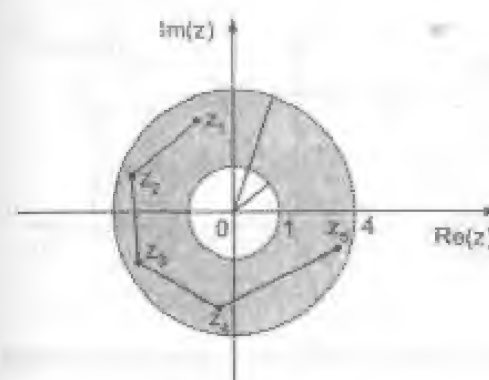
**OBSERVACIÓN.-** Un conjunto  $S \subset \mathbb{C}$  es conexo si dos puntos arbitrarios  $z, w \in S$  pueden ser unidos mediante una poligonal íntegramente contenida en  $S$ , en este caso se dice que  $S$  es un conjunto poligonalmente conexo.

**Ejemplo.-** ¿ $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 4\}$  es poligonalmente conexo?

**Desarrollo**

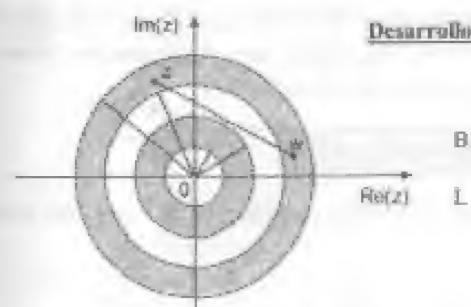
$$\text{Sea } z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$A$  es poligonalmente conexo

**Ejemplo.-** ¿ $B = \{z \in \mathbb{C} / 1 \leq \|z\| < 2 \vee 3 \leq \|z\| < 4\}$  es poligonalmente conexo?



$B$  no es poligonalmente conexo, puesto que:

$$L = \{(1-t)z + tw / 0 \leq t \leq 1\} \not\subset B$$

**OBSERVACIÓN.-** Llamaremos dominios o regiones a los conjuntos abiertos y conexos.

## 2.4. FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA.-

**a) Definición.-** Una función de variable compleja y de valor complejo es una regla que asigna un número complejo  $w$  a cada número complejo  $z$  del conjunto  $S$ , es decir:  $f: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z) = w$$



Si  $w = f(z)$ ,  $w$  es el valor de la función  $f$  en el punto  $z$  que está en el dominio  $S$ .

A la función  $w = f(z)$  expresaremos en términos de la descomposición en parte real e imaginaria, es decir:

Si  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$  entonces  $w = f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , por lo tanto la función compleja  $w = f(z)$  de una variable compleja está formada de un par de funciones reales de dos variables reales, es decir:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde  $u(x, y) = \text{Re}(f(z))$ ,  $v(x, y) = \text{Im}(f(z))$ , además  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales de dos variables.

**Ejemplo.-** Expresar  $w = f(z) = z^2$  como un par de funciones reales de dos variables reales.

**Desarrollo**

$$w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \text{ de donde}$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ y } v(x, y) = 2xy$$

$$f(z) = z^2 - \bar{z}^2 + 2z = (x + iy)^2 - (x - iy)^2 + 2(x + iy)$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 - y^2 - 2ixy) + 2x - 2iy$$

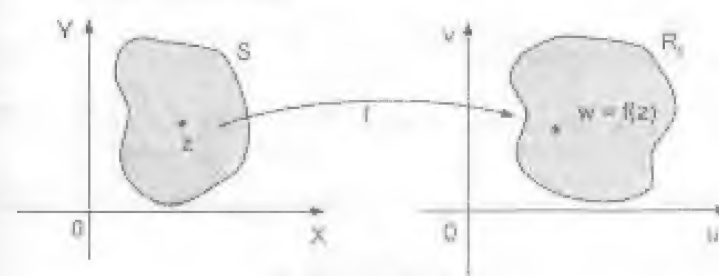
$$= (x^2 - y^2 - x^2 + y^2 - y^2) + (2ixy + 2ixy + 2x - 2iy)$$

$$\therefore \text{Re}(f(z)) = u(x, y) = x^2 - y^2 - x^2 - y^2 - y$$

$$\text{Im}(f(z)) = v(x, y) = x + 2xy + x^2 y + y^3$$

**OBSERVACIÓN.-**

- Al conjunto de los números complejos que puede tomar la función  $w = f(z)$  conforme " $z$ " varía en la región  $S$ , se llama Rango de Valores de la función  $w = f(z)$ .
- Si  $\forall z \in S$  le corresponde solamente un valor  $w = f(z)$ , entonces la función se llama "UNÍVOCA" (uno a uno).



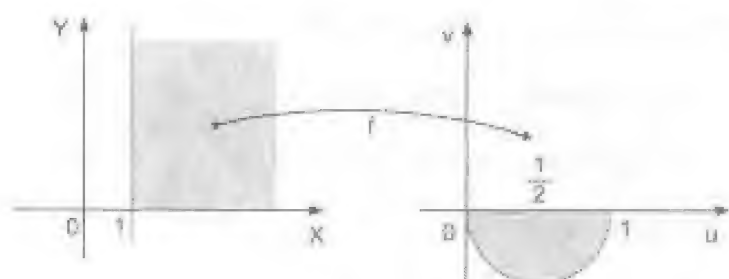
En caso contrario se llama "multiforme"

**Ejemplo.-**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / f(z) = \ln(z) = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\theta = \arg(z)$

- La función  $w = f(z)$  realiza una transformación de los puntos del plano complejo ( $z$ ) en los puntos correspondiente al plano complejo ( $w$ ).



Sea  $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$ , por lo tanto



Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / w = f(z) = \frac{1}{z}$ , donde  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$

$$\text{Como } w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}$$

Por lo tanto  $z = x + iy = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}$ , de donde

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \wedge y = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \text{ como } x > 1 \wedge y > 0, \text{ entonces}$$

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > 1 \wedge -\frac{v}{u^2 + v^2} > 0, \text{ de donde } \frac{u^2 + v^2 - u}{u^2 + v^2} < 0 \wedge v < 0$$

por lo tanto  $u^2 + v^2 - u < 0 \wedge v < 0$ , completando cuadrado

$$(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4} \wedge v < 0 \text{ de donde } C(\frac{1}{2}, 0), R = \frac{1}{2}$$

## 2.5. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPLEJA DE VARIABLE COMPLEJA.

a) **DEFINICIÓN.** Sea  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , una función compleja de variable compleja  $z$ , definida en la región  $D \subset \mathbb{C}$  excepto posiblemente en  $z_0$ , entonces decimos que el límite de  $f(z)$  es el número complejo  $L$  cuando  $z$  se aproxima a  $z_0$  ( $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ ), si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|z - z_0\| < \delta$ , entonces  $\|f(z) - L\| < \varepsilon$ . Es decir:

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{z-2} < 2 \Rightarrow \left\| \frac{1}{z-2} \right\| < 2 \quad \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\left\| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right\| = \left\| \frac{1}{z-2} \right\| \cdot \|z-3\| < 2\delta_1 = \varepsilon \text{ de donde } \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto  $\exists \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$

**Ejemplo.** Demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-1} = 4+4i$

**Desarrollo**

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-1} = 4+4i \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si}$$

$$0 < \|z - 1\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-1} - (4+4i) \right\| < \varepsilon$$

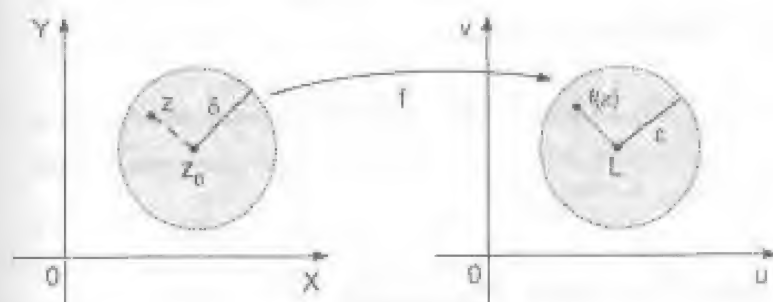
$$\left\| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z-1} - (4+4i) \right\| = \left\| 3z^3 + (3i-2)z^2 + (5-2i)z + i-4 \right\|$$

$$= \left\| (3z^2 + (6i-2)z - 1 - 4i)(z-1) \right\|$$

**Ejemplo.** Hallar la imagen bajo la transformación  $f(z) = \frac{1}{z}$  del cuadrante  $x > 1, y > 0$ .

**Desarrollo**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|f(z) - L\| < \varepsilon$$



**Ejemplo.** Demostremos que:  $\lim_{z \rightarrow 1} z+i = 2i$

**Desarrollo**

$$\lim_{z \rightarrow 1} z+i = 2i \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z-1\| < \delta \Rightarrow \|(z+i) - 2i\| < \varepsilon$$

$$\|(z+i) - 2i\| = \|z-i\| < \varepsilon = \delta, \text{ por lo tanto es suficiente tomar } \delta = \varepsilon$$

para que  $\lim_{z \rightarrow 1} z+i = 2i$

**Ejemplo.** Pruebe que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z-2} = 2$

**Desarrollo**

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z-2} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z-1\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right\| = \left\| \frac{z-3}{z-2} \right\| = \left\| \frac{1}{z-2} \right\| \cdot \|z-3\| \quad \dots (1)$$

$$\text{Sea } \|z-3\| < \delta_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < z-3 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < z-2 < \frac{3}{2}, \text{ invirtiendo}$$

## 2.6. TEOREMA.

Sea  $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ,  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $w_0 = u_0 + iv_0 = u_0(x_0, y_0) + iv_0(x_0, y_0)$ .

Si  $w$  está definida en una región  $D \subset \mathbb{C}$ , con la posible excepción de  $z_0$ , y  $u, v: R^2 \rightarrow R$  son funciones de valor real, demuestre que el límite de  $w$  existe en  $z_0$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$

si y solo si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

**Demostración**

i) Demostraremos la condición suficiente.

Supongamos que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$  entonces

$\forall \varepsilon > 0$ , existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que:

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall (x,y) \text{ tal que } z = x+iy \in V_{\delta_1}(z_0) \cap D$$

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall (x,y) \text{ tal que } z = x+iy \in V_{\delta_2}(z_0) \cap D$$

Si  $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , entonces las dos desigualdades anteriores se verifican  $\forall (x,y)$

$$\begin{aligned}
&= \| [3(z-i)^2 + (6i-2)(z-i) - 1 + 4i] (z-i) \| \\
&= \| 3(z-i)^2 + (12i-2)(z-i) - 10 + 6i \| \| z-i \| \\
&\leq \| 3 \| \| z-i \|^2 + \| 12i-2 \| \| z-i \| + \| -10+6i \| \| z-i \| \\
&\leq (3+13+12) \delta_2 = \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \frac{\varepsilon}{28}
\end{aligned}$$

por lo tanto  $\exists \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{28}\}$

$\| f(z) - w_0 \| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(z_0) \cap D$ , por lo tanto existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$

ii) Demostraremos la condición necesaria.

Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$\| f(z) - w_0 \| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(z_0) \cap D$  puesto que:

$$|u(x, y) - u_0| = |\operatorname{Re}(f(z) - w_0)| \leq \| f(z) - w_0 \| < \varepsilon \text{ y}$$

$$|v(x, y) - v_0| = |\operatorname{Im}(f(z) - w_0)| \leq \| f(z) - w_0 \| < \varepsilon$$

Luego se tiene:

$$|u(x, y) - u_0| < \varepsilon, \forall (x, y) \text{ tal que } z = x + iy \in V_\delta(z_0) \cap D$$

$$|v(x, y) - v_0| < \varepsilon, \forall (x, y) \text{ tal que } z = x + iy \in V_\delta(z_0) \cap D$$

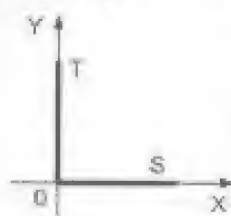
es decir que existe  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$  y  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$

**Ejemplo.-** Calcular  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  si existe donde  $f(z) = \frac{z}{z}$

**Desarrollo**

$$f(z) = \frac{z}{z} = \frac{x + iy}{x + iy} = \frac{x^2 - y^2 + i2xy}{x^2 + y^2}, \text{ donde}$$

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ y } v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$



T:  $x=0$

S:  $y=0$

tal que  $z \in V_\delta(z_0) \cap D$

Ahora utilizando la desigualdad triangular

$$\| f(z) - w_0 \| = \| (u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0) \|$$

$$\leq \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2}$$

$$\leq \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2} + \sqrt{(v(x, y) - v_0)^2}$$

$$= |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} v(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

$$\text{como } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) \neq \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} v(x, y) \Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(z)$$

$$\text{por lo tanto } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z} = 1$$

## 2.7. TEOREMA.-

Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  existe, demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un número positivos  $\delta > 0$

tal que para dos puntos cualquiera  $z_1, z_2 \in V_\delta(z_0)$ , entonces  $\| f(z_2) - f(z_1) \| < \varepsilon$ .

**Demostración**

Sea  $\varepsilon > 0$  un número pequeño cualquiera, existe  $\delta > 0$  tal que  $\| f(z_2) - w_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$  y

$$\| f(z_1) - w_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ donde } z_1, z_2 \in V_\delta(z_0)$$

Ahora aplicamos la desigualdad triangular

$$\| f(z_2) - f(z_1) \| = \| (f(z_2) - w_0) + (w_0 - f(z_1)) \|$$

$$\leq \| f(z_2) - w_0 \| + \| f(z_1) - w_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \| f(z_2) - f(z_1) \| < \varepsilon, \forall z_1, z_2 \in V_\delta(z_0)$$

**OBSERVACIÓN.-** El teorema anterior indica que una función no tiene límite cuando  $z$  tiende a un punto  $z_0$ , o sea que para algún  $M > 0$  puede existir en cada  $V_\delta(z_0)$  puntos  $z_1, z_2$  tales que  $\| f(z_1) - f(z_2) \| > M, \forall \delta > 0$

a) **DEFINICIÓN.-** Si una función no es acotada en ninguna vecindad reducida de  $z_0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  no existe. Si además  $f$  está definida en

alguna vecindad reducida de  $z_0$ , decimos que  $f$  diverge a infinito cuando  $z \rightarrow z_0$

**Ejemplo.-** La función  $f(z) = \frac{az}{z - z_0}$ ,  $a \neq 0, z_0 \neq 0$  está definida para todo complejo, excepto para  $z = z_0$ , demuestre que  $f(z)$  diverge a infinito cuando  $z$  tiende a  $z_0$

**Desarrollo**

$$\forall M > 0, \| f(z) \| > M, \text{ si } \| \frac{az}{z - z_0} \| > M$$

Si  $\| z - z_0 \| \leq 1 \Rightarrow \| z \| \leq \| z_0 \| + 1$ , y por lo tanto

$$\| \frac{az}{z - z_0} \| > M \text{ Si } \| z - z_0 \| < \frac{|a| (\| z_0 \| + 1)}{M}$$

$$\textcircled{2} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A - B$$

$$\textcircled{3} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = AB$$

$$\textcircled{4} \text{ Si } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq 0, \text{ probar que existe } \delta > 0, \text{ tal que } \| f(z) \| > \frac{1}{2} \| A \| \text{ para } 0 < \| z - z_0 \| < \delta$$

$$\textcircled{5} \text{ Si } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq 0, \text{ entonces } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A}$$

$$\textcircled{6} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{A}{B}, B \neq 0, g(z) \neq 0, \forall z$$

$$\textcircled{7} \text{ Si } f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ una función polinómica en } z, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)$$



sea  $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$ , entonces  $\|f(z)\| > M$

$\forall z \in V_\rho(z_0)$ , por lo tanto  $f(z)$  diverge a infinito cuando  $z$  tiende a  $z_0$ .

**Ejemplo.-** La función  $f(z) = \frac{z+2}{z^2 + (2-i)z - (3+3i)}$ , diverge a infinito cuando  $z$  tiende a  $-3$  puesto que  $\lim_{z \rightarrow -3} z+2 = -1$

$$\lim_{z \rightarrow -3} \frac{z+2}{z^2 + (2-i)z - (3+3i)} = 0$$

## 2.8. PROPIEDADES DE LÍMITES DE FUNCIONES COMPLEJAS.

Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , entonces:

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A + B$$

$$\|f(z) + g(z) - (A + B)\| = \|(f(z) - A) + (g(z) - B)\|$$

$$\leq \|f(z) - A\| + \|g(z) - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

como  $\|(f(z) + g(z)) - (A + B)\| < \varepsilon$ , siempre que  $0 < \|z - z_0\| < \delta$  entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = A + B$

(2) En forma similar que (1) se deja como ejercicio.

$$(3) \quad f(z) \cdot g(z) - AB = f(z) \cdot g(z) - B \cdot f(z) + B \cdot f(z) - AB \\ = f(z) \cdot (g(z) - B) + B(f(z) - A)$$

$$\|f(z) \cdot g(z) - AB\| \leq \|f(z)\| \|g(z) - B\| + \|B\| \|f(z) - A\|$$

$$\leq \|f(z)\| \|g(z) - B\| + (\|B\| + 1) \|f(z) - A\| \quad \dots (1)$$

como  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , entonces se puede encontrar  $\delta_1 > 0$  tal que  $\|f(z) - A\| < 1$

para  $0 < \|z - z_0\| < \delta_1$ , por propiedad de la desigualdad se tiene:

$$\|f(z) - A\| \geq \|f(z)\| - \|A\| \Rightarrow \|f(z)\| - \|A\| < 1 \Rightarrow \|f(z)\| < 1 + \|A\|$$

o sea que  $\|f(z)\| < p$ , donde  $p$  es una constante positiva.

además  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$  entonces  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$  tal que  $\|g(z) - B\| < \frac{\varepsilon}{2p}$  para  $0 < \|z - z_0\| < \delta_2$

También  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_3 > 0$ , tal que:

$$\|f(z) - A\| < \frac{\varepsilon}{2(\|B\| + 1)}, \text{ para } 0 < \|z - z_0\| < \delta_3$$

Utilizando estos resultados en (1) se tiene:

$$\|f(z) \cdot g(z) - AB\| \leq \|f(z)\| \|g(z) - B\| + (\|B\| + 1) \|f(z) - A\|$$

$$= a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \dots + a_n z_0 + a_{n+1}$$

(8) Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$  entonces  $f + g = L_1 + L_2$  (propiedad de unicidad)

(9) Si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$  existen, si  $\exists V_\rho(z_0)$  tal que  $f(z) \neq z_0$ ,  $\forall z \in V_\rho(z_0)$  entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$

### Demostración

(1) Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(z) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$

además  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(z) - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea  $0 < \|z - z_0\| < \delta$ , donde  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , entonces por la desigualdad triangular se tiene:

$$< p \frac{\varepsilon}{2p} + (\|B\| + 1) \frac{\varepsilon}{2(\|B\| + 1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

como  $\|f(z) \cdot g(z) - AB\| < \varepsilon$ , para  $0 < \|z - z_0\| < \delta$ , donde  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  por lo tanto  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = AB$

(4) Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{1}{2} \|A\| > 0, \exists \delta > 0$ , tal que  $\|f(z) - A\| < \frac{1}{2} \|A\|$ , para  $0 < \|z - z_0\| < \delta$

$A = A - f(z) + f(z)$ , aplicando la desigualdad triangular

$$\|A\| = \|(A - f(z)) + f(z)\| \leq \|f(z) - A\| + \|f(z)\|$$

$$\|A\| \leq \|f(z) - A\| + \|f(z)\| < \frac{1}{2} \|A\| + \|f(z)\|$$

$$\Rightarrow \|f(z)\| > \frac{1}{2} \|A\|$$

(5) Dado  $\varepsilon > 0, \exists \delta = ?$  tal que si  $0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right\| < \varepsilon$

$$\left\| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right\| = \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{1}{\|f(z)\|} \|f(z) - A\| \quad \dots (1)$$

por hipótesis se tiene  $\forall \varepsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta_1 > 0$  tal que si  $0 < \|z - z_0\| < \delta_1$  entonces  $\|f(z) - A\| < \frac{1}{2} \|A\|^2 \varepsilon$

además  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, A \neq 0$ , podemos encontrar  $\delta_2 > 0$  tal que si  $0 < \|z - z_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|f(z)\| > \frac{1}{2} \|A\|$ , por el ejercicio (4), entonces

Si  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tal que si  $0 < \|z - z_0\| < \delta$  entonces:

$$\left\| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right\| = \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{1}{\|f(z)\|} \|f(z) - A\| < \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{2}{\|A\|} \cdot \frac{\|A\|^2 \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tal que si:

$$0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right\| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A}$$

$$(6) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{A}{B}$$

**Ejemplo.-** La función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$  ¿f es continua en  $z = 0$ ?

### Desarrollo

i)  $f(0) = 0$  está definida

ii)  $\exists \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z}$

$$f(z) = \frac{z}{z} = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{x^2+y^2}i$$

NOTA.- La demostración de las demás propiedades dejamos como ejercicio.

## 2.9. CONTINUIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

a) **DEFINICIÓN.-** Diremos que una función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en el punto  $z_0 \in D$ , si y sólo si:

i)  $f(z_0)$  está definida  $\Leftrightarrow u(x_0, y_0)$  y  $v(x_0, y_0)$  están definidas.

ii)  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow \text{existen } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y)$

iii)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0, y_0) \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0, y_0)$$

**OBSERVACIÓN.-**

①  $f(z) = f(x + iy) = f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$

②  $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x,y)$  y  $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x,y)$

③  $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$  es continua en  $z_0 \in D \Leftrightarrow u(x,y) = \operatorname{Re}(f(z))$  y  $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(z))$  es continua en el punto  $(x_0, y_0)$ .

④ La función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $D$  si  $f$  es continua en cada punto de  $D$ .

$$\exists \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \Leftrightarrow \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$$

sea  $S: y = 0, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

T:  $x = 0, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x,y) \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x,y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x,y)$

Por lo tanto  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  no existe.

Luego  $f(z) = \frac{z^2}{z}$  no es continua en  $z = 0$  puesto que falla la segunda condición de continuidad.

## 2.10. PROPIEDADES DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS.-

Si  $f, g: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son continuas en  $D$ , entonces:

①  $f + g$  es continua en  $D$

②  $f - g$  es continua en  $D$

③  $fg$  es continua en  $D$

④  $\frac{f}{g}, g \neq 0$  es continua en  $D$

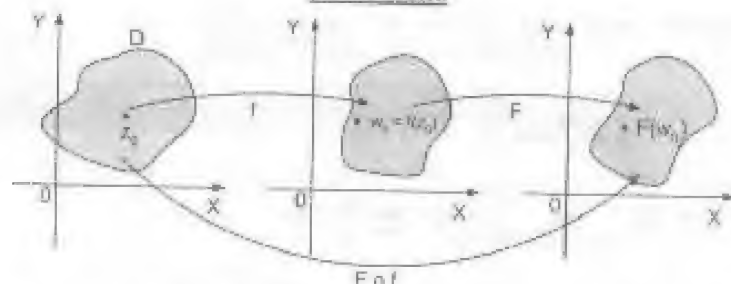
**OBSERVACIÓN.-** De la definición de continuidad se tiene que  $f(z)$  es continua en un punto  $z_0$  en  $D$  si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|f(z) - f(z_0)\| < \varepsilon$  para toda  $z$  interior a  $D$  que satisface  $\|z - z_0\| < \delta$ .

**NOTA.-** Debemos observar que  $\delta$  depende  $\varepsilon$  y en general de  $z_0$ .

## 2.11. TEOREMA.-

Si  $f(z)$  es continua sobre el valor  $w_0$  en el punto  $z_0$  y  $F(w)$  es continua en  $w_0$ , entonces  $F(f(z))$  es continua en  $z_0$ .

**Demostración**



Si  $F(w)$  es continua en  $w_0$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$  tal que:

$$\|F(w) - F(w_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|w - w_0\| < \delta_1 \text{ como } f(z) \text{ es continua en } z_0, \text{ entonces } \exists \delta > 0, \text{ tal que } \|f(z) - w_0\| < \delta \Rightarrow \|z - z_0\| < \delta$$

Sabemos que  $w = f(z)$ , entonces tendremos la equivalencia:

$$\|F(f(z)) - F(f(z_0))\| < \varepsilon \Rightarrow \|z - z_0\| < \delta$$

Lo que prueba que  $F(f(z))$  es continua en  $z_0$ , entonces la composición de funciones continuas es continua.

a) **DEFINICIÓN.-** Una función  $f(z)$  definida sobre un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  se dice que es "uniformemente continua en  $D$ " si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , tal que para todo  $z_1$  y  $z_2$  en  $D$ , entonces  $\|f(z_1) - f(z_2)\| < \varepsilon$  se satisface  $\|z_1 - z_2\| < \delta$ .

## 2.13. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos: abierto, cerrado, acotado, convexo y simplemente conexo.

## 2.12. TEOREMA.-

Sea  $f(z)$  una función continua sobre un conjunto compacto  $D \subset \mathbb{C}$  entonces  $f(z)$  es uniformemente continua sobre  $D$ .

**Demostración**

La prueba los haremos por el absurdo.

Assumimos que  $f(z)$  es continua sobre un conjunto compacto  $D$ , pero que no es uniformemente continua sobre  $D \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  tal que cada  $\delta > 0$ , existen dos puntos  $z$  y  $z'$  poseionados en  $D$ , o sea que:

$$\|z - z'\| < \delta \text{ y } \|f(z) - f(z')\| \geq \varepsilon \quad \dots (1)$$

Sean  $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ , nosotros tenemos la sucesión de puntos en  $D: \{z_n\}$  y  $\{z'_n\}$  tal que

$$\|z_n - z'_n\| < \frac{1}{n} \text{ y } \|f(z_n) - f(z'_n)\| \geq \varepsilon \text{ siendo el conjunto } D \text{ limitado y cerrado.}$$

Sabemos que la sucesión  $\{z_n\}$  tiene como punto de acumulación a  $z_0$  en  $D$ .

Si tenemos una subsucesión  $\{z_{n_k}\}$  que converge a  $z_0$  y sea  $\{z'_{n_k}\}$  una subsucesión de  $\{z'_n\}$ , entonces  $\|z_0 - z'_{n_k}\| \leq \|z_0 - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - z'_{n_k}\|$  (2)

Siendo  $z_{n_k} \rightarrow z_0$ , nosotros tenemos  $\|z_0 - z_{n_k}\| \rightarrow 0$ , además también se tiene que

$$\|z_{n_k} - z'_{n_k}\| \rightarrow 0, \text{ por (2) se tendrá que } \|z_0 - z'_{n_k}\| \rightarrow 0 \text{ y que } z'_{n_k} \rightarrow z_0$$

$$\text{Luego } \|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})\| \leq \|f(z_{n_k}) - f(z_0)\| + \|f(z_0) - f(z'_{n_k})\|$$

Siendo  $f(z)$  continua en  $z_0$ , por el resultado anterior se tiene que (2) se aproxima a cero cuando  $m \rightarrow \infty$  lo que contradice a (1), donde se ve que  $\|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})\| \geq \varepsilon, \forall m$  entonces  $f(z)$  es uniformemente continua sobre  $D$ .

d)  $D = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| < 1\}$

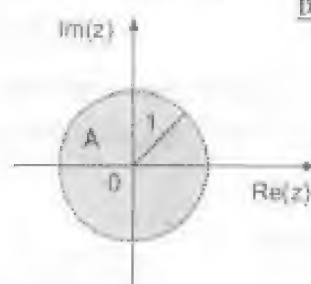
$\operatorname{Im}(iz)$

**Desarrollo**

•  $D$  es abierto



a)  $A = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$



#### Desarrollo

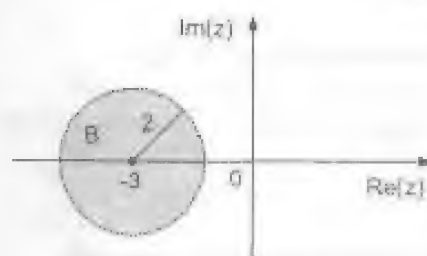
- A es abierto
- A es acotado, pues  $\forall z \in V_1(0)$ ,  $\exists R > 0 / \|z\| < R$ , siendo  $R = 1$ , es decir A está dentro de algún círculo  $\|z\| = R$
- A es conexo, puesto que es una figura de una sola pieza

• A es simplemente conexo, puesto que:  $A^C = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \geq 1\}$  es conexo

b)  $B = \{z \in \mathbb{C} / \|z+3\| < 2\}$

#### Desarrollo

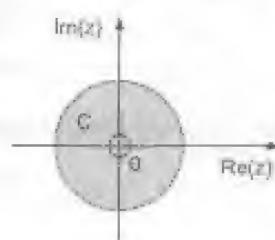
- B es un conjunto abierto
- B es acotado, pues  $\forall z \in V_2(-3)$ ,  $\exists R > 0 / \|z\| < R$ , siendo  $R = 4$
- B es conexo, puesto que es una figura de una sola pieza
- B es simplemente conexo, puesto que  $B^C = \{z \in \mathbb{C} / \|z+3\| \geq 2\}$  es conexo



c)  $C = \{z \in \mathbb{C} / 0 < \|z\| < 1\}$

#### Desarrollo

- C es abierto
- C es acotado, pues  $\exists 1 > 0 / \|z\| < 1$
- es conexo (C es una figura de una sola pieza)
- $C^C = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \geq 1 \cup \{0\}\}$  no es conexo
- C no es simplemente conexo



- No es acotado
- D es conexo
- $D^C = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$   
 $= \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \leq -1 \vee \operatorname{Re}(z) \geq 1\}$   
no es conexo entonces D no es simplemente conexo

2) Hacer el mismo análisis del ejercicio (1), además determinar el interior, frontera, exterior y cerradura.

a)  $A = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| \leq 2 \vee \|z-2\| \leq 1\}$

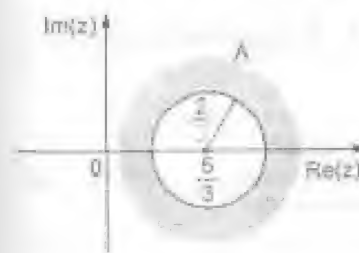
#### Desarrollo

Si  $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} z-3 = (x-3) + iy \\ z-2 = (x-2) + iy \end{cases}$

$\|z-3\| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ ,  $\|z-2\| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} \leq 2 \vee \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \leq 1$ , simplificando

$(x-\frac{3}{2})^2 + y^2 \leq \frac{4}{9}$ , cuyo gráfico es:



- A es cerrado
- A no es acotado
- A es conexo
- $A^C = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| > 2 \vee \|z-2\| > 1\}$  es conexo, entonces A es simplemente conexo

•  $A^0 = \{z \in \mathbb{C} / V_\epsilon(z_0) \subset A\}$

$A^0 = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| < 2 \vee \|z-2\| < 1\}$

•  $F_\epsilon(A) = A - A^0$ ,  $F_\epsilon(A)$  siempre es un conjunto cerrado

$F_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| = 2 \vee \|z-2\| = 1\}$

•  $\operatorname{Ext}(A) = (CA)^0$ ,  $\operatorname{Ext}(A)$  siempre es un conjunto abierto A cerrado  $\Leftrightarrow \operatorname{Ext}(A) = C(A)$

$\operatorname{Ext}(A) = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| \geq 2 \vee \|z-2\| \geq 1\}$

•  $\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} / V_\epsilon(z) \cap A \neq \emptyset\}$ ,  $\bar{A} = F_\epsilon \cup A^0$

$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} / \|z-3\| \leq 2 \vee \|z-2\| \leq 1\}$

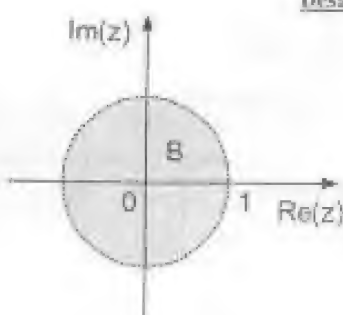
b)  $B = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \leq 1\}$

#### Desarrollo

$CA = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \geq 1\}$

$(CA)^0 = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| > 1\}$

- B es abierto
- B es acotado
- B es conexo
- B es simplemente conexo



$B^0 = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$

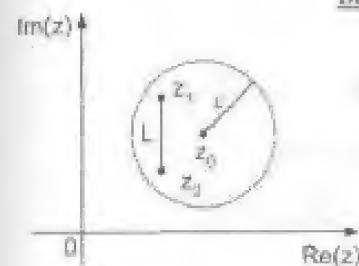
$F_\epsilon(B) = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 1\}$  es un conjunto cerrado

$\operatorname{Ext}(B) = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| > 1\}$  es un conjunto abierto

$\bar{B} = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \leq 1\}$

3) Demostrar que el disco abierto  $V_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| < \epsilon\} \subset \mathbb{C}$  es poligonalmente conexo.

#### Desarrollo



Sea  $z_1, z_2 \in V_\epsilon(z_0)$  y

$L = \{(1-t)z_1 + tz_2 / 0 \leq t \leq 1\}$

$= \{z_1 + (z_2 - z_1)t / 0 \leq t \leq 1\}$

es el polígono que une  $z_1$  y  $z_2$

Entonces bastará probar que  $L \subset V_\epsilon(z_0)$

Sea  $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$ , entonces:

$\|z(t) - z_0\| = \|z_1 + (z_2 - z_1)t - z_0\| = \|z_1 - z_0 + (z_2 - z_1)t - (z_2 - z_0)t\|$

$= \|z_1 - z_0 + tz_2 - tz_0 + tz_0 - tz_0\| = \|(z_1 - z_0) + t(z_2 - z_0) - t(z_2 - z_0)\|$

$= \|(z_1 - z_0)(1-t) + t(z_2 - z_0)\|$ , por la desigualdad triangular

$\leq (1-t)\|z_1 - z_0\| + t\|z_2 - z_0\|$ , como  $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-t \leq 1$

$\leq (1-t)\epsilon + t\epsilon = \epsilon$

como  $z_1$  y  $z_2 \in V_\epsilon(z_0)$ , entonces  $\|z_1 - z_0\| < \epsilon$  y  $\|z_2 - z_0\| < \epsilon$

$\Rightarrow \|z(t) - z_0\| \leq (1-t)\epsilon + t\epsilon = \epsilon$

$< \epsilon(1-t) + t\epsilon = \epsilon$

como  $\|z(t) - z_0\| < \epsilon$ , entonces  $L \subset V_\epsilon(z_0)$

$\therefore V_\epsilon(z_0)$  es poligonalmente conexo.

4

Mediante la función  $f(z) = w = z^2$ 

- a) Hallar la imagen del rectángulo  $\{(x, y) / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$   
 b) Hallar la imagen de la recta  $y = c$

**Desarrollo**

- a) Sean  $z = x + iy, w = u + iv, z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

como  $w = z^2$  entonces  $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$

de donde  $u = x^2 - y^2 \wedge v = 2xy$

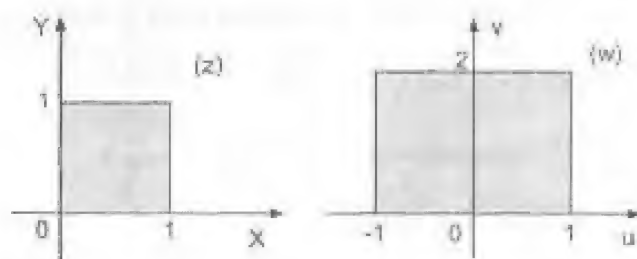
$$\text{como } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ 0 \leq y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq -y^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x^2 - y^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq u \leq 1$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq xy \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2xy \leq 2 \Rightarrow 0 \leq v \leq 2$$

La imagen del triángulo  $\{(x, y) / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$ , es el rectángulo

$$\{(u, v) / -1 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 2\}$$



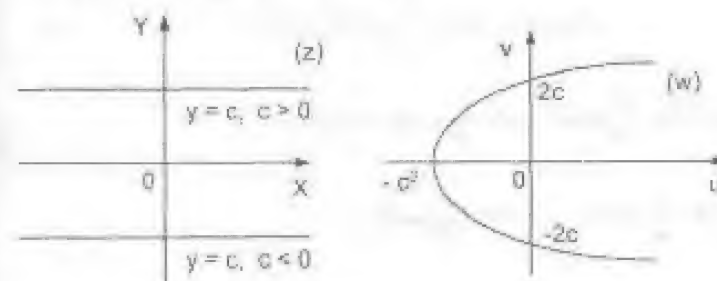
- b) Como  $u = x^2 - y^2 \wedge v = 2xy, y = c$  de donde

$$u = x^2 - c^2 \wedge v = 2xc \Rightarrow x = \frac{v}{2c}$$

$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2 \Rightarrow v^2 - 4c^4 = 4c^2 u, \text{ de donde}$$

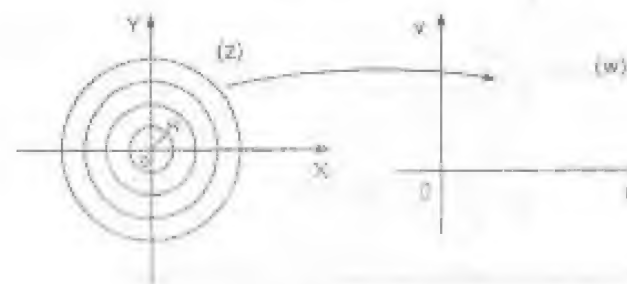
$v^2 = 4c^2(u + c^2)$  es la ecuación de una parábola con vértice

$$V(-c^2, 0) \wedge 4p = 4c^2 \Rightarrow p = c^2 > 0$$



5

Hallar curvas transformables cuando  $z$  describe un haz de círculos concéntricos con el origen, mediante la transformación  $f(z) = z + \frac{a^2}{z}$

**Desarrollo**

$$z = Re^{i\theta}, R = \text{radio}, e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$= R(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \|e^{i\theta}\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

como  $w = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$ , de donde

$$u + iv = Re^{i\theta} + \frac{a^2}{Re^{i\theta}} = Re^{i\theta} + \frac{a^2}{R} e^{-i\theta}$$

$$u + iv = R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{R}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$= R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{R}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$u + iv = (R + \frac{a^2}{R})\cos \theta + i(R - \frac{a^2}{R})\sin \theta, \text{ de donde}$$

$$u = (R + \frac{a^2}{R})\cos \theta \wedge v = (R - \frac{a^2}{R})\sin \theta$$

$$\frac{u}{R + \frac{a^2}{R}} = \cos \theta \wedge \frac{v}{R - \frac{a^2}{R}} = \sin \theta, \text{ entonces}$$

$$\frac{u^2}{(R + \frac{a^2}{R})^2} + \frac{v^2}{(R - \frac{a^2}{R})^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{Si } R = 1 \text{ se tiene } \frac{u^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - a^2)^2} = 1$$

$$\text{Si } R = 2 \text{ se tiene } \frac{u^2}{(2 + \frac{a^2}{2})^2} + \frac{v^2}{(2 - \frac{a^2}{2})^2} = 1$$

Por lo tanto las curvas transformables es una familia de elipses

6

Hallar la parte real y la parte imaginaria para las funciones

- a) Sean  $w = u + iv, z = x + iy, \bar{z} = x - iy$

Reemplazando en  $w = f(z) = \bar{z} - z^2$ , se tiene

$$u + iv = x - iy - i(x + iy)^2 = (x + 2xy) + i(y^2 - x^2 - y)$$

$$\text{Re}(f(z)) = \text{Re}(w) = x + 2xy = u(x, y)$$

$$\text{Im}(f(z)) = \text{Im}(w) = y^2 - x^2 - y = v(x, y)$$

- b) Sean  $w = u + iv, z = x + iy, \bar{z} = x - iy$

reemplazando en  $w = f(z) = \frac{iz - 1}{1 + z}$ , se tiene

$$w = u + iv = \frac{i(x + iy) - 1}{1 + x + iy} = \frac{(1 - y) + ix}{(1 + x) + iy}$$

$$= \frac{[(1 - y) + ix][(1 + x) + iy]}{[(1 + x) + iy][(1 + x) + iy]} = \frac{x - 2xy - y + 1}{(1 + x)^2 + y^2} + i \frac{(x^2 - y^2 + x + y)}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$\text{de donde } u(x, y) = \frac{x - 2xy - y + 1}{(1 + x)^2 + y^2} \quad y \quad v(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x + y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

7

Expresar la función  $f(z) = z^3$ , para todo  $z$  en la forma  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ , donde  $z = x + iy$

**Desarrollo**

$$w = f(z) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xy^2i^2 + i^3y^3$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = u(x, y) + iv(x, y)$$



$$a) f(z) = w = \bar{z} - iz^2$$

$$b) f(z) = w = \frac{1z+1}{1+z}$$

#### Desarrollo

$$\text{Se conoce } x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{Como } w = u(x, y) + i v(x, y) = (x^2 - y^2 - i) + i(2xy - y)$$

$$= \left( \left| \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right|^2 - \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 \right) + i \left( \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) - \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2 + 2x + 2\bar{x} + 2x^2 - 2y^2 - 2z + 2\bar{z}) = \frac{1}{4}(4x^2 + 4\bar{x}) = x^2 + \bar{x}$$

- 9) Expresar  $f(z) = \sin z$  en la forma  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

#### Desarrollo

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x + \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

como  $f(z) = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$ , de donde

$$u(x, y) = \cosh y \sin x, \quad v(x, y) = \sinh y \cos x$$

- 10) Utilice la definición de límite para demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$

#### Desarrollo

$$\text{Para } z \neq 1, \text{ se tiene } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z + 2)(z - 1)(z + 3i)}{z - 1} \\ = \lim_{z \rightarrow 1} (z + 2)(z + 3i) = 3 + 9i$$

$$f(z) = (x^2 - 3y^2) + i(2xy - y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

8

Si  $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ ,  $v(x, y) = 2xy - y$ ,  $w = u(x, y) + i v(x, y)$  expresar  $w$  como función de la variable compleja  $z = x + iy$

entonces:  $\lim_{z \rightarrow 1} (z + 2)(z + 3i) = 3 + 9i$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < \|z - 1\| < \delta$$

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z + 3iz + 6i - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z - 3 + 3iz - 3i\|$$

$$= \|(z - 1)(z + 3) + 3i(z - 1)\| = \|(z - 1)(z + 3 + 3i)\|$$

$$= \|z - 1\| \|z + 3 + 3i\| \quad \dots (1)$$

$$\text{pero como } \|z + 3 + 3i\| \leq \|z\| + \|3 + 3i\| = \|z\| + 3\sqrt{2} \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene:

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| \leq \|z - 1\| (\|z\| + 3\sqrt{2}) \quad \dots (3)$$

$$\text{para } \|z - 1\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| + 1 \leq \|z - 1\| + 1 \leq 1 \Rightarrow \|z\| < 2$$

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| < \|z - 1\| (2 + 3\sqrt{2}) = \varepsilon \text{ entonces } \|z - 1\| = \frac{\varepsilon}{2 + 3\sqrt{2}} = \delta_2$$

Luego  $\exists \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2 + 3\sqrt{2}} \right\}$ , entonces se tiene que  $\|f(z) - (3 + 9i)\| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(1)$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$$

11

Utilice la definición de límite para demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$

#### Desarrollo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - 1\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right\| = \left\| \frac{(z - 1)(z^2 + z + 1)}{z - 1} - 3 \right\| = \|z^2 + z + 1 - 3\| = \|z^2 + z - 2\|$$

$$= \|z + 2\| \|z - 1\| \leq \|z - 1\| (\|z\| + 2) \quad \dots (1)$$

#### Desarrollo

$$\text{Se conoce } x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{Como } w = u(x, y) + i v(x, y) = (x^2 - y^2 - i) + i(2xy - y)$$

$$= \left( \left| \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right|^2 - \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 \right) + i \left( \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) - \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2 + 2x + 2\bar{x} + 2x^2 - 2y^2 - 2z + 2\bar{z}) = \frac{1}{4}(4x^2 + 4\bar{x}) = x^2 + \bar{x}$$

- 9) Expresar  $f(z) = \sin z$  en la forma  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

#### Desarrollo

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \cos x + \frac{e^{-y} + e^y}{2} \sin x = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

como  $f(z) = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$ , de donde

$$u(x, y) = \cosh y \sin x, \quad v(x, y) = \sinh y \cos x$$

- 10) Utilice la definición de límite para demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$

#### Desarrollo

$$\text{Para } z \neq 1, \text{ se tiene } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z + 2)(z - 1)(z + 3i)}{z - 1} \\ = \lim_{z \rightarrow 1} (z + 2)(z + 3i) = 3 + 9i$$

entonces:  $\lim_{z \rightarrow 1} (z + 2)(z + 3i) = 3 + 9i$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < \|z - 1\| < \delta$$

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z + 3iz + 6i - 3 - 9i\| = \|z^2 + 2z - 3 + 3iz - 3i\|$$

$$= \|(z - 1)(z + 3) + 3i(z - 1)\| = \|(z - 1)(z + 3 + 3i)\|$$

$$= \|z - 1\| \|z + 3 + 3i\| \quad \dots (1)$$

$$\text{pero como } \|z + 3 + 3i\| \leq \|z\| + \|3 + 3i\| = \|z\| + 3\sqrt{2} \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene:

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| \leq \|z - 1\| (\|z\| + 3\sqrt{2}) \quad \dots (3)$$

$$\text{para } \|z - 1\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| + 1 \leq \|z - 1\| + 1 \leq 1 \Rightarrow \|z\| < 2$$

$$\|(z + 2)(z + 3i) - 3 - 9i\| < \|z - 1\| (2 + 3\sqrt{2}) = \varepsilon \text{ entonces } \|z - 1\| = \frac{\varepsilon}{2 + 3\sqrt{2}} = \delta_2$$

Luego  $\exists \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2 + 3\sqrt{2}} \right\}$ , entonces se tiene que  $\|f(z) - (3 + 9i)\| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(1)$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + z - 2)(z + 3i)}{z - 1} = 3 + 9i$$

11

Utilice la definición de límite para demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$

#### Desarrollo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - 1\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right\| = \left\| \frac{(z - 1)(z^2 + z + 1)}{z - 1} - 3 \right\| = \|z^2 + z + 1 - 3\| = \|z^2 + z - 2\|$$

$$= \|z + 2\| \|z - 1\| \leq \|z - 1\| (\|z\| + 2) \quad \dots (1)$$

$$\text{como } \|z - 1\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| + 1 \leq \|z - 1\| + 1 \leq 1 \Rightarrow \|z\| < 2 \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$$\left\| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right\| \leq \|z - 1\| (\|z\| + 2) < \|z - 1\| (2 + 2) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|z - 1\| = \frac{\varepsilon}{4} = \delta_2$$

Luego  $\exists \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}$ , entonces se tiene que  $\|f(z) - 3\| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(1)$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$$

- 12) Utilice la definición de límite para demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 2i} (z^4 + 3z^2 - 10i) = -12 + 6i$

#### Desarrollo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - 2i\| < \delta \Rightarrow \|z^4 + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| < \varepsilon$$

$$\|z^4 + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| = \|z^4 + 3z^2 - 16i + 12\| = \|(z^4 - 16) + 3(z^2 + 4)\|$$

$$= \|(z^2 + 4)(z^2 - 4) + 3(z^2 + 4)\|$$

$$= \|(z + 2)(z - 2)(z^2 + 4) + 3(z^2 + 4)(z - 2)\|$$

$$\|z^4 + 3z^2 - 10i + 12 - 6i\| < \|z - 2i\| \|(z + 2)(z^2 + 4) + 3(z^2 + 4)(z - 2)\| = \varepsilon$$

$$\|z - 2i\| \|(5^2 + 3(5))\| = \varepsilon$$

$$\|z - 2i\| = \frac{\varepsilon}{140} = \delta_2$$

Luego  $\exists \delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{140} \right\}$ , entonces se tiene que:  $\|f(z) - (-12 + 6i)\| < \varepsilon, \forall z \in V_\delta(2i)$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^4 + 3z^2 - 10i) = -12 + 6i$$

13

Probar que:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)$

#### Desarrollo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)\| < \varepsilon$$

$$\|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)\| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq \|z - z_0\| < \delta = \varepsilon$$

por lo tanto es suficiente tomar  $\delta = \varepsilon$

14

Probar que:  $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z_0^2)$

#### Desarrollo

$$\begin{aligned}
&= \|z - 2i\| \cdot \|(z + 2i)(z + 2i(z - 2) + 2(z + 2i))\| \\
&\leq \|z - 2i\| (\|z + 2i\| + \|z + 2\| + \|z - 2\| + 3\|z + 2i\|) \\
&\leq \|z - 2i\| (4\|z\| + 2)(\|z\| + 2\|z\| + 2) + 3(\|z\| + 2) \dots (1)
\end{aligned}$$

$$\text{como } \|z - 2i\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| - 2 \leq \|z - 2i\| < 1$$

$$\Rightarrow \|z\| < 3 \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$$\| \operatorname{Im}(z^3) - \operatorname{Im}(z_0^3) \| < \|z - z_0\| (1 + \|z_0\| + \|z_0\|^2) = \varepsilon$$

$$\text{de donde } \|z - z_0\| = \frac{\varepsilon}{1 + 2\|z_0\|} = \delta_2$$

por lo tanto  $\exists \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2\|z_0\|}\}$ , entonces se tiene:

$$\|f(z) - \operatorname{Im}(z_0^3)\| < \varepsilon, \quad \forall z \in V_{\delta}(z_0) \quad \therefore \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(z^3) = \operatorname{Im}(z_0^3)$$

$$(15) \quad \text{Calcular } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^2}$$

**Desarrollo**

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{(z^2 \frac{\operatorname{sen} z}{z})^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3 (\frac{\operatorname{sen} z}{z})^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{3z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{sen} z}{z})^2} = \frac{1}{6} (1) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{(z \operatorname{sen} z)^2} = \frac{1}{6}$$

$$(16) \quad \text{¿} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\|z\|} \text{ existe?}$$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x \\ \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$(19) \quad \text{Calcular el límite } \lim_{z \rightarrow 1+i} \left( \frac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right)^2$$

**Desarrollo**

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1+i} \left( \frac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right)^2 &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \left( \frac{z-1-i}{[z-(1+i)][z-(1-i)]} \right)^2 \\
&= \lim_{z \rightarrow 1+i} \left( \frac{1}{z-(1-i)} \right)^2 = \left( \frac{1}{(1+i)-(1-i)} \right)^2 = \left( \frac{1}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$(20) \quad \text{Analizar si la función } f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|} \text{ es continua en } z = 0$$

**Desarrollo**

Primero veremos si  $f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|}$ , podemos definir en  $z = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \| \operatorname{Im}(z^3) - \operatorname{Im}(z_0^3) \| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\| \operatorname{Im}(z^3) - \operatorname{Im}(z_0^3) \| &= \| \operatorname{Im}(z^3 - z_0^3) \| \leq \|z^3 - z_0^3\| = \|z - z_0\| \|z^2 + z z_0 + z_0^2\| \\
&\leq \|z - z_0\| (\|z\|^2 + \|z\| \|z_0\| + \|z_0\|^2)
\end{aligned} \dots (1)$$

$$\text{como } \|z - z_0\| < \delta_1 = 1 \Rightarrow \|z\| = \|z_0\| + \|z - z_0\| \leq \|z_0\| + 1$$

$$\Rightarrow \|z\| < 1 + \|z_0\| \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\|z\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{por lo tanto } \exists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{\|z\|}$$

$$(17) \quad \text{¿Existe } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} ?$$

**Desarrollo**

$$\text{Supongamos que } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} = 0, \text{ entonces}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - 0\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} - 0 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} - 0 \right\| = \left\| \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} \right\| \leq \frac{\|z^4\|}{\|z\|^2} = \|z\|^2 = \|z - 0\|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\text{de donde } \delta = \sqrt{\varepsilon}, \text{ por lo tanto } \exists \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2} = 0$$

$$(18) \quad \text{Calcular el límite } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2+z)e^z - z - 2}{z^3}$$

**Desarrollo**

Aplicando la regla de L'Hospital se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2+z)e^z - z - 2}{z^3} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + (2+z)e^z - 1}{3z^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z - e^z + (2+z)e^z}{2 \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2e^z}{6z} = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{e^z}{3z} = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{e^z}{6} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2+z)e^z - z - 2}{z^3} = -\frac{1}{6}$$

como  $u$  y  $v$  son continuas en  $(0,0)$  se tiene:

$$\therefore f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|} \text{ es continua en } z = (0,0)$$

$$(21) \quad \text{Se puede definir } F(0), \text{ para que la función } F(z) = \frac{(\operatorname{Re}(z^2))^2}{\|z\|^4} \text{ sea continua en } z = 0.$$

**Desarrollo**

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$$

$$\| \operatorname{Re}(z^2) \|^4 = (x^2 - y^2)^4, \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \|z\|^4 = (x^2 + y^2)^2$$

$$F(z) = \frac{(x^2 - y^2)^4}{(x^2 + y^2)^2} = \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

tomando dos caminos para ver la existencia del límite:



$$f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|} = \frac{(x+iy)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\|f(z)\|^2 = \frac{x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 = |x|^2$$

por lo tanto  $\|f(z)\| = |x|$ , pero se conoce que  $0 \leq \|f(z)\| = |x|$

$$\text{entonces } \lim_{z \rightarrow 0} \|f(z)\| = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$$

$$\text{entonces podemos definir } f(0) = 0, \text{ es decir: } f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} f(z) = f(0,0) \text{ y } \lim_{w \rightarrow (0,0)} f(w) = f(0,0)$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} f(z), \lim_{w \rightarrow (0,0)} f(w) = f(0), f(0) = f(0+0) = f(0) \quad \dots (*)$$

veamos que  $f$  es continua en  $z_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z - z_0 + z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z - z_0) f(z_0)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z - z_0), \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(0), f(z_0)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z - z_0), \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(0), f(z_0)$$

pues  $f$  es continua en  $(0,0)$  de (\*)

$$\text{entonces } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(0), f(z_0) = f(0 + z_0) = f(z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Rightarrow f \text{ es continua en } z_0$$

como  $z_0$  es un arbitrario  $\Rightarrow f$  es continua  $\forall z \in \mathbb{C}$

- 23) Probar que  $F(z) = z^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$  es continua en todo  $\mathbb{C}$

#### Desarrollo

Bastará probar que para un  $z_0 \in \mathbb{C}$  arbitrario, se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|z^n - z_0^n\| < \varepsilon$$

$$\|z^n - z_0^n\| = \|(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1})\|$$

$$\leq \|z - z_0\| (\|z\|^{n-1} + \|z\|^{n-2}\|z_0\| + \dots + \|z\|\|z_0\|^{n-2} + \|z_0\|^{n-1}) \quad \dots (1)$$

como  $\|z - z_0\| < \delta$ , tomemos  $\delta_1 = 1$

$$\|z\| = \|z_0\| + \|z - z_0\| < 1$$

Sea  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x\}$ ,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} / y = 3x\}$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} F(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \lim_{y=2x} \left( \frac{x^2 - 4x^2}{x^2 + 4x^2} \right)^2 = \frac{81}{625}$$

$$\lim_{z \rightarrow (0,0)} F(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 = \lim_{y=3x} \left( \frac{x^2 - 9x^2}{x^2 + 9x^2} \right)^2 = \frac{256}{625}$$

$$\text{como } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(z) \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(z) \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow (0,0)} F(z)$$

por lo tanto no se puede definir  $F(0)$  para que  $F(z)$  sea continua en  $z = (0,0)$

- 22) Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $f(z+w) = f(z)f(w)$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ . Pruebe que  $f$  es continua en  $(0,0)$ , entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$ .

#### Desarrollo

Por hipótesis  $f$  es continua en  $(0,0)$ , entonces:

$$\|z_0\| - 1 < \|z\| < 1 + \|z_0\|$$

$$\Rightarrow \|z\| < 1 + \|z_0\| \text{ y como } \|z^n\| = \|z\|^n \text{ en } (1)$$

$$\|z^n - z_0^n\| \leq \|z - z_0\| [(1 + \|z_0\|)^{n-1} + \|z_0\| (1 + \|z_0\|)^{n-2} + \dots + (1 + \|z_0\|) \|z_0\|^{n-2} + \|z_0\|^{n-1}]$$

$$< \delta_2 k = \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \frac{\varepsilon}{k} > 0$$

entonces definimos  $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{k}\}$

$\therefore F(z) = z^n$  es continua en todo  $\mathbb{C}$

- 24) ¿ $F(z) = \frac{1}{z}$  es uniformemente continua en  $D = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} < \|z\| < 1\}$ ?

#### Desarrollo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, w \in D / 0 < \|z - w\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right\| = \frac{\|w - z\|}{\|z\| \|w\|} \quad \dots (1)$$

$$\text{como } \frac{1}{2} < \|z\| < 1 \text{ y } \frac{1}{2} < \|w\| < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \|z\| \|w\| < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{\|z\| \|w\|} < 4, \text{ luego de (1) se tiene:}$$

$$\left\| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right\| = \frac{\|w - z\|}{\|z\| \|w\|} < 4 \|w - z\| < 4\delta = \varepsilon > 0 \text{ por lo tanto } \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

$\therefore F(z)$  es uniformemente continua en  $D$

## 2.14. EJERCICIOS PROPUESTOS.

- 1) Clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos: abierto, cerrado, acotado, conexo y simplemente conexo.

a)  $A = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im}(z)| > 1\}$

b)  $B = \{z \in \mathbb{C} / 0 < \|z - 1\| \leq 1\}$

c)  $C = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \leq \operatorname{Re}(z) + 2\}$

d)  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z + 1\| + \|z + j\| \geq 2\}$

- 7) Mediante la transformación  $w = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , halle la región del plano  $w = u + iv$  que corresponde al plano  $z = x + iy$  de la región  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

- 8) ¿En qué curva se transforma la circunferencia  $\|z\| = \frac{1}{2}$  mediante la función  $w = f(z) = \frac{1}{z}$ ?

- 9) Halle la imagen bajo la transformación  $w = (4 + 2i)z - (3 + 3i)$  de las rectas  $x = c_1$  y  $y = c_2$  que conforman la rejilla de coordenadas rectangulares en el plano  $z$ ,  $\forall c_1 \in \mathbb{C}$

2) Expresar en la forma  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  para:

a)  $w = \frac{z^2 + 1}{2z}$

b)  $w = z^3 + z + 1$

c)  $w = z^3 + 2z^2$

d)  $w = z^3 + z^2 + z$

3) Expresar  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , en la forma  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

4) Expresar  $f(z) = e^z$  en la forma  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

5) Expresar  $w$  en la forma  $w = f(z)$  para:

a)  $w = (x^2 - y^2 - 2x) + i(2x - 2xy)$

b)  $w = (x^2 - y^2 - 2y) + i(2x - 2xy)$

c)  $w = (x^2 - 3xy)^2 + 2x + i(3x^2y - y^2 - 2y)$

d)  $w = \frac{-6(x^2 + y^2) + 2 - x}{4(x^2 + y^2) + 1 - 4x} + i\left(\frac{7y}{4(x^2 + y^2) + 1 - 4x}\right)$

6) Mediante la función  $w = f(z) = z^3$ , halle la imagen de la recta  $y = x + 4$  en el plano  $w$ .

10) Pruebe que la función  $w = f(z) = (4 + 2i)z - (3 + 3i)$  definida para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ , toda línea recta en el plano  $z$  se transforma en una línea recta en el plano  $w$  y toda circunferencia en el plano  $z$  se transforma en una circunferencia en el plano  $w$ .

11) Utilice la definición de límite para demostrar que:

a)  $\lim_{z \rightarrow 2i} 2x + iy^2 = 4i$

b)  $\lim_{z \rightarrow i+i} z^2 = 2i$

c)  $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = 4$

d)  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 1}{z + i} = -2i$

e)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 3$

f)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 3z + 2}{z - 2} = 1$

g)  $\lim_{z \rightarrow i+i} \frac{z^2 - x + 1 - i}{z^2 - z + 2} = 1 - \frac{i}{2}$

h)  $\lim_{z \rightarrow i+i} z^2 + 2z = 2 + 4i$

12) Utilice la definición de límite para demostrar que:

a)  $\lim_{z \rightarrow 3+i} z^2 - 3z + 10 = 5 - 3i$

b)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - 2zi - 1}{z^4 + 2z + 1} = -\frac{1}{4}$

c)  $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 - 8}{z^4 + 4z^2 + 16} = \frac{1}{2}(1 - i)$

d)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|^2} = \frac{z_0 \operatorname{Re}(z_0)}{\|z_0\|^2}$

e)  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{iz^3 + 1}{z + i} = -3i$

f)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Im}(z)}{z} = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{z_0}, z_0 \neq 0$

g)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$

13) Calcular los siguientes límites si existen:

a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{\operatorname{arctg}(z^2 + 1)^2}{\operatorname{sen}^2(z^2 + 1)}$

b)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 - z^2 \operatorname{sen} z}{\left(\frac{7}{z} - \frac{1}{z^2 \operatorname{sen} z}\right)^2}$

c)  $\lim_{z \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z^2}{z^3 + 1}$

d)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z^3}$

e)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} 4(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 5z)))}{z}$

14) Determinar si las funciones son continuas en los puntos indicados.

a)  $f(z) = \frac{z^2 - (2+i)z + 2i}{z - i}$  en  $z = i$

b)  $f(z) = \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z + 2}$  en  $z = -2i$

15) ¿La función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$  es continua en  $z = 0$ ?

16) ¿En qué puntos la función  $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1}, & z \neq \pm 1 \\ \frac{3}{2}, & z = \pm 1 \end{cases}$  es continua?

17) Si  $H(z) = \begin{cases} \frac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{\|z\|^4}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$  ¿Cómo definir  $A$ , tal que  $H$  sea continua en  $z = 0$ ?

18) Sea  $H(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z^4)}{\|z\|^2}$ ,  $z \neq 0$ . ¿Cómo podemos definir  $H(0)$  tal que  $H$  sea continua en todo  $\mathbb{C}$ ?

19) Si  $F(z) = \frac{\operatorname{arctg}(z^2 + 1)^2}{\operatorname{sen}^2(z^2 + 1)}$ ,  $z \neq i$ . ¿Se puede definir  $F(i)$  de tal manera que  $F$  sea continua en todo  $\mathbb{C}$ ?

20) Sea  $H(z) = \begin{cases} \frac{z(z^2 + (1+i)z + i)}{z(z+i)}, & z \neq 0, -i \\ 1, & z = 0 \\ 1-i, & z = -i \end{cases}$  ¿ $H$  es continua en  $z = 0, -i$  y por ende en todo  $\mathbb{C}$ ?

21) Demuestre que la función  $f(z) = z^3$  es uniformemente continua en el dominio  $0 < \|z\| < 1$ .

22) ¿ $F(z) = \frac{1}{z}$  es uniformemente continua en  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$ ?

23) ¿ $F(z) = \frac{1}{z}$  es uniformemente continua en  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| > 1\}$ ?

24) Probar que no es uniformemente continua  $F(z) = \frac{1}{z^2}$ , en  $A = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \leq 1\}$ .

25) Probar que  $G(z) = \frac{1}{1-z}$  en  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$  no es uniformemente continua.

26) Dada la función  $f(z) = z^2 - 4$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , analizar si es uniformemente continua en el conjunto  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| \geq 9\}$ .

27) Probar que  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  no es uniformemente continua en  $A = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$ , pero si en el anillo  $B = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} \leq \|z\| \leq 1\}$ .

28) Probar que  $f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^2 - 2z}$  es uniformemente continua en  $D = \{z \in \mathbb{C} / 0 < \|z\| < 1\}$  si  $0 < \delta < 1$ .

29) Consideremos la función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$  ¿La función  $f(z)$  es continua en  $z = 0$ ?



30) ¿Es continua  $f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Im}(z^2))^2}{z^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ ?

21 Si  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{z}$ ,  $z \neq 0$  ¿Podemos definir  $f(z_0)$ ,  $z_0 \neq 0$  para  $f(z)$  sea continuo?

32 Demuestre que  $f(z) = \log r + i\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $r > 0$  es discontinua sobre el rayo  $\theta = 0$ .  
note que  $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$

33. Determinar el conjunto de valores de  $z$  donde la función  $f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)$  es continua.

34. Analizar si la función  $f(z) = \frac{z \operatorname{Re}(z)}{\|z\|}$  es continua en  $z = 0$ .

(35) Si  $f(z) = \frac{(\operatorname{Re}(z^{-1}))^4}{\|z\|^5}$ ,  $z \neq 0$ . ¿Qué valor le debemos dar a  $f(0)$  de tal manera que  $f$  sea continuo en  $\mathbb{C}^n$ ?

36. Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z+w) = f(z)f(w)$ ,  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ . Pruebe que si  $f$  es continua en 0 entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$ .

(37) 
$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^4}{\|z\|^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$
 es continuo en  $z = 0$  y por ende en todo  $\mathbb{C}$

38. ¿Se puede definir  $f(0)$  para que la función  $f(z) = \frac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{(1+|z|^2)^k}$  sea continua en  $z = 0$ ?

Seu  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^5)}{\|z\|^2}$ ,  $z \neq 0$ . Como podemos definir  $f(0)$  tal que  $f$  seja contínua em todo  $\mathbb{C}$ ?

41. Determinar si la función  $W(z)$  es continua en todo  $\mathbb{C}$  donde  $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 + 9}{z - 3i} & , z \neq 3i \\ 6i & , z = 3i \end{cases}$

(2) Si  $f(z) = \frac{z(z^2 - 16)}{z^2 - 4z}$ ,  $z \neq 0, 4$ ; ¿Cómo podríamos definir  $f(0)$  y  $f(4)$  para que  $f$  sea continua en todo  $\mathbb{C}$ ?

Ⓔ Sean  $F, G: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones lineales continuas en  $z = z_0$ . Demostrar que  $H(z) = 3F(z) - 4iG(z)$  es continua en  $z = z_0$ .

(44) Pruebe que  $f(z) = kz^n + k_1$ ,  $k, k_1$  constante  $k \neq 0$  es uniformemente continua en  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| < 1\}$

(48) Pruebe que  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2}$  es continua en todo  $\mathbb{C}$  exterior a  $D = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 2\}$ .

46) Determinar si la función  $f(x)$  es continua en  $x=0$  donde

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Im}(z^2))^2}{\|z\|^3} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

47. Si  $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{\|z\|^2} & , z \neq 0 \\ A & , z = 0 \end{cases}$  ¿Qué valor se debe dar a  $A$  para que  $f$  sea continua en  $z = 0$ ?

48. Suponga que  $f(x)$  es una función continua en un dominio  $D$ . Pruebe que las funciones dadas son continuas en  $D$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$

(cii)  $f'(x) = f'(x)$

49 Demuestre que las funciones dadas son continuas para  $x \neq 0$ . ¿Puede definirse la función como para hacerla continua en  $x = 0$ ?

$$b) \quad f(z) = \frac{\|z\|^2}{z}$$

d)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2) - \operatorname{Im}(z^2)}{\|z\|^2}$

50. ¿Qué significado tiene que una función no es uniformemente continua?

## Derivadas de Funciones Complejas

### 3. DERIVADAS DE FUNCIONES COMPLEJAS

La derivada de una función compleja de una Variable Compleja se define, exactamente, de la misma manera que el caso real del cálculo elemental.

### 3.1. DEFINICIÓN.-

Sea  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , una función compleja de variable compleja, entonces la derivada  $f'$  de la función  $f$  en el punto  $z_0$  está dado por:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

siempre y cuando el límite exista.

**Ejemplo.-** Verifica que si  $f(z) = z^3$  entonces  $f'(z) = 3z^2$

## Desarrollo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) \\ &= 3x^2 + 3x(0) + 0 = 3x^2 \end{aligned} \quad \therefore f'(x)$$

**Ejemplo.-** Verifiquemos que si  $f(x) = |x|^3$  entonces  $f'(0) = 0$

## Discussion

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\|z\|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \|z\|^2}{z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \|z\|^2}{\|z\|^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

$$f'(0) = 0$$

### 3.2. PROPIEDADES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES COMPLEJAS.

Sean  $f, g: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones complejas y  $k$  una constante compleja entonces:

$$\textcircled{1} \text{ Si } w = f(z) = k \Rightarrow \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } w = k f(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz} = k f'(z)$$

$$\textcircled{3} \text{ Si } w = f(z) \pm g(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz} = f'(z) \pm g'(z)$$

$$\textcircled{4} \text{ Si } w = (fg)(z) \Rightarrow \frac{dw}{dz} = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\textcircled{5} \text{ Si } w = \frac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0$$

La demostración de estas propiedades son idénticas al de las funciones reales del cálculo elemental, demostraremos la propiedad (4).

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z+\Delta z)g(z) + f(z+\Delta z)g(z) - f(z)g(z)}{\Delta z} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (f(z+\Delta z) \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} + g(z) \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z})$$

$$= f(z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} + g(z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$$

### 3.3. DEFINICIÓN.

La función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable en el punto  $z_0 \in D$ , si existe la derivada en  $z_0$  ( $f'(z_0)$ ) es decir:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Lo que es equivalente a:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

donde  $\Delta z = z - z_0$  entonces  $z = z_0 + \Delta z$

además si  $\Delta z \rightarrow 0$  entonces  $z - z_0 \rightarrow 0$

de donde  $z \rightarrow z_0$

$$\Delta z = z - z_0 = (x+iy) - (x_0+iy_0) = (x-x_0) + (y-y_0)i = \Delta x + i\Delta y$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

$\Delta z \rightarrow 0$ , entonces  $\Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$

de donde  $\Delta x \rightarrow 0 \wedge \Delta y \rightarrow 0$

por lo tanto  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$

**Ejemplo.-** ¿La función  $f(z) = z\bar{z}$  es derivable en todo  $\mathbb{C}$ ?

**Desarrollo**

Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  arbitrario pero fijo

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\|z\|^2 - \|z_0\|^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(x^2 + y^2) - (x_0^2 + y_0^2)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)}$$

$$= \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{(x^2 + y^2) - (x_0^2 + y_0^2)}{(x-x_0) + i(y-y_0)} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{(x+x_0)(x-x_0) + (y+y_0)(y-y_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+x_0)\Delta x + (y+y_0)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+x_0)\Delta x + (y+y_0)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{(y+y_0)\Delta y}{i\Delta y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y+y_0}{i} = -i(y+y_0)$$

$$f'(z_0) = -i(y+y_0) \quad \dots (1)$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+x_0)\Delta x + (y+y_0)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x+x_0) = x+x_0$$

$$f'(z_0) = x+x_0 \quad \dots (2)$$

como  $f'(z_0) \neq f'(z_0)$  entonces  $\nexists f'(z_0)$ , por lo tanto  $f(z) = z\bar{z}$  no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}$  salvo en el origen.

**Ejemplo.-** ¿La función  $f(z) = \bar{z}$  es derivable?

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{(x-iy) - (x_0-iy_0)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{(x-x_0) - i(y-y_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

$$f'(z_0) = 1 \quad \dots (1)$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} \right) = -1$$

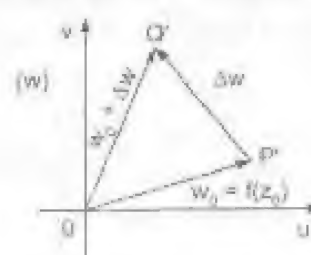
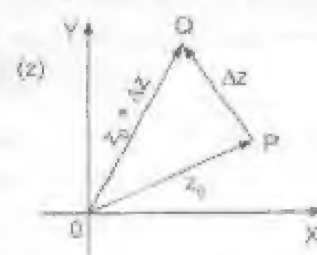
$$f'(z_0) = -1 \quad \dots (2)$$

como  $f'(z_0) \neq f'(z_0)$ , entonces  $\nexists f'(z_0)$ , es decir que  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en ningún punto de  $\mathbb{C}$ .

**OBSERVACIÓN.-** La función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable en  $D$  si "f" es derivable en cada punto de  $D$ .

### 3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

Sea  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja y  $z_0 \in D$  un punto  $P$  en el plano complejo ( $z$ ) y sea  $w_0$  su imagen  $P'$  en el plano ( $w$ ) bajo la transformación  $w = f(z)$ , puesto que se supone que  $f(z)$  es unívoca, el punto  $z_0$  es aplicado sólo en el punto  $w_0$ .



Al incrementar a  $z_0$  en  $\Delta z$  se obtiene el punto  $Q$  este punto tiene como imagen a  $Q'$  en el plano ( $w$ ), entonces se observa que  $P'Q'$  representa al número complejo  $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ , se observa que la derivada en  $z_0$  existe o está dada por:



## 3.5. ECUACIONES DE CAUCHY - RIEMANN.-

Se trata de obtener un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes  $u$  y  $v$  de una función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  en un punto  $z_0 = (x_0, y_0)$  para que exista en él la derivada de  $f$ , así mismo veremos como expresar  $f'(z_0)$  en términos de tales derivadas parciales.

Suponiendo que  $\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow (0,0)} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ , sea  $z_0 = x_0 + i y_0$  y  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ , entonces por el teorema de límite se tiene:

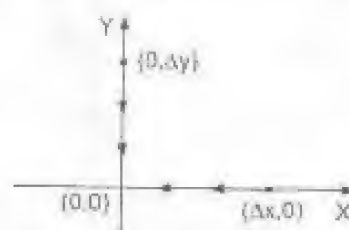
$$\operatorname{Re}(f'(z_0)) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left( \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right) \quad \dots (1)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \lim_{\Delta z} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \dots (2)$$

ahora agrupando se tiene:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i \Delta y} \quad \dots (3)$$

Las expresiones (1) y (2) son variables cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$  de todas las formas posibles, en particular es cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$  horizontalmente por los puntos  $(\Delta x, 0)$ .



Quiere decir que  $\Delta y = 0$  en la ecuación (3) resulta:

$$\operatorname{Re}(f'(z_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x - x_0}{z - z_0} \left[ \frac{u(x, y) - u(x_0, y)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y)}{x - x_0} \right] \\ &\quad + \frac{y - y_0}{z - z_0} \left[ \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right] \\ &= \frac{x - x_0}{z - z_0} [u_x(x_0 + t_1(x - x_0), y) + i v_x(x_0 + t_1(x - x_0), y)] \\ &\quad + \frac{y - y_0}{z - z_0} [u_y(x_0, y_0 + t_2(y - y_0)) + i v_y(x_0, y_0 + t_2(y - y_0))] \end{aligned}$$

donde  $0 < t_k < 1$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, este teorema también se cumple para  $x = x_0$  y  $y = y_0$ ; como las derivadas parciales son continuas en  $z_0$ , podemos escribir en la forma:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{z - z_0} [u_x(z_0) + i v_x(z_0) + \epsilon_1] + \frac{y - y_0}{z - z_0} [u_y(z_0) + i v_y(z_0) + \epsilon_2]$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ , cuando  $z \rightarrow z_0$

aplicando las ecuaciones de CAUCHY - RIEMANN al último término, se puede combinar los términos para obtener

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(z_0) + i v_x(z_0) + \frac{(x - x_0)\epsilon_1 + (y - y_0)\epsilon_2}{z - z_0}$$

$$\operatorname{Im}(f'(z_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}, \text{ esto es:}$$

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \quad \dots (4)$$

donde  $u_x(x_0, y_0)$ ,  $v_x(x_0, y_0)$  son las derivadas parciales con respecto a  $x$  de las funciones  $u$  y  $v$  en el punto  $(x_0, y_0)$

ahora haremos tender  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$  verticalmente por los puntos  $(0, \Delta y)$ , es decir  $\Delta x = 0$ , en la ecuación (3) resulta:

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) + i u_y(x_0, y_0) \quad \dots (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) no solamente dan  $f'(z_0)$  en términos de las derivadas parciales de las funciones componentes  $u$  y  $v$ , sino que proporcionan condiciones necesarias para la existencia de  $f'(z_0)$ .

Al igualar las partes real e imaginaria de las ecuaciones (4) y (5) vemos que la existencia de  $f'(z_0)$  exige que:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad \dots (6)$$

Las ecuaciones de (6) son las ecuaciones de CAUCHY - RIEMANN.

## 3.6. TEOREMA.-

Sea  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función compleja definida en alguna región  $D$  que contiene al punto  $z_0$  y que tiene primeras derivadas parciales continuas, con respecto a  $x$  e  $y$ , y que satisfacen las ecuaciones de CAUCHY - RIEMANN en  $z_0$ , entonces  $f'(z_0)$  existe:

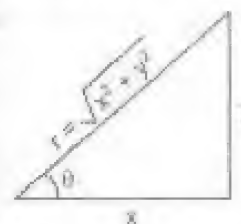
## Demostración

Si  $x \neq x_0$  y  $y = y_0$ , el cociente de la diferencia se puede escribir:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

## 3.7. ECUACIONES DE CAUCHY - RIEMANN EN COORDENADAS POLARES.-

Sea  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función compleja, transformaremos esta función a coordenadas polares.



$$f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$$

La relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares es:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$

Calcularemos las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  con respecto a  $x$  e  $y$ , para esto aplicaremos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \dots (4)$$

como  $\|x - x_0\| \|y - y_0\| \leq \|z - z_0\|$ , la desigualdad nos conduce

$$\left\| \frac{(x - x_0)e_1 + (y - y_0)e_2}{z - z_0} \right\| \leq \|e_1\| + \|e_2\| \rightarrow 0 \text{ cuando } z \rightarrow z_0$$

por lo tanto el último término tiende a cero cuando  $z \rightarrow z_0$ , luego al tomar límite, el último término tiende a cero cuando  $z \rightarrow z_0$ .

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta \end{cases}$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta \end{cases}$$

### Ejemplo de Aplicación.

- 1) Expresar  $f_x$  y  $f_y$  en términos de  $f_z$  y  $f_{\bar{z}}$  y después  $f_z$  y  $f_{\bar{z}}$  en términos de  $f_x$  y  $f_y$  de la función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ .

#### Desarrollo

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y) \text{ donde } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ x \quad \quad \bar{z} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ y \quad \quad z \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad \bar{z} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \bar{z} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = i \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)$$

En forma de operadores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- 2) Expresar la ecuación de CAUCHY - RIEMANN en coordenadas conjugadas donde

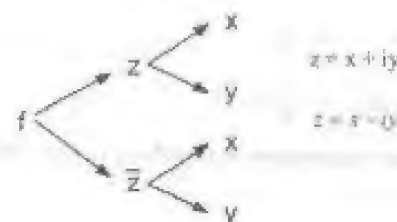


$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\text{como } f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} (u + iv) + i \frac{\partial}{\partial y} (u + iv) = 0$$

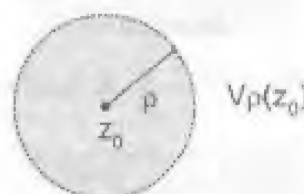
$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = 0$$

entonces  $\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 0$  ecuaciones de CAUCHY-RIEMANN en coordenadas conjugadas.

### 3.9. FUNCIONES ANALÍTICAS.-

- a) **DEFINICIÓN.-** Diremos que la función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en el punto  $z_0 \in D$ , si  $f$  está definida y es derivable en alguna vecindad de  $z_0$ , es decir " $f$ " es analítica en  $z_0$  si:  $\exists V_\rho(z_0)$  tal que  $f$  está definida en  $V_\rho(z_0)$  y  $\exists f'(z_0)$ ,  $\forall z \in V_\rho(z_0)$ .



- b) **DEFINICIÓN.-** La función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $D$ , si  $f$  es derivable  $\forall z \in D$ .

**OBSERVACIÓN.-** A la función analítica también se le llaman función regular o holomorfa.

**OBSERVACIÓN.-** La derivada de una función analítica u holomorfa también es analítica, de aquí es que una función analítica tiene derivadas de todos los órdenes.

- c) **DEFINICIÓN.-** Si la función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ , se le llama función entera.

### 3.10. FUNCIONES ARMÓNICAS.-

Si la función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es analítica en  $D$  entonces:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \wedge \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \wedge \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x}$$

como  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}$ ,  $\forall (x, y) \in D$  puesto que sus derivadas parciales son

### Desarrollo

Se conoce que  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , lo que es igual

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \wedge i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\text{Sumando} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

### Ejemplos.-

- 1) Las funciones  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $e^z$  son analíticas en todo  $\mathbb{C}$ .
- 2) ¿ $F(z) = \bar{z}$  es analítica?

La función  $F(z) = \bar{z}$  no es derivable, en ningún punto del plano complejo, por lo tanto  $F(z) = \bar{z}$  no es analítica.

- d) **DEFINICIÓN.-** Toda función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  en donde las funciones  $u$  y  $v$  tiene primeras derivadas parciales continuas y satisfacen las ecuaciones de CAUCHY-RIEMANN en algún dominio  $D$  entonces  $f$  es analítica en  $D$ .

**Ejemplo.-** Determinar si la función es analítica en  $\mathbb{C}$ , donde  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / f(z) = e^z$ .

### Desarrollo

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

de donde  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ , entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

existen y son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$  y como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

entonces  $f(z) = e^z$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ , donde

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$\therefore f'(z) = e^z$$

**OBSERVACIÓN.-** Las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} u_{xx} + v_{xx} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

se llaman ecuaciones de Laplace en dos variables que en física se conoce con el nombre de ecuación de potencial.

**DEFINICIÓN.-** Toda función  $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  que satisface las ecuaciones de Laplace se llaman "Funciones armónicas" y  $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es analítica, entonces  $u$  y  $v$  se llaman "conjugadas armónicas".

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \end{cases}, \text{ sumando}$$

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in D$$

por lo tanto las partes real e imaginaria de una función compleja  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  analíticas son soluciones de la ecuación de Laplace, donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{ecuación de Laplace de } u)$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{ecuación de Laplace de } v)$$

En este caso se dice también que  $u$  y  $v$  son funciones armónicas, además  $u$  y  $v$  son un par de conjugadas armónicas una con respecto a la otra.

## Ejemplos:

1) Si  $u(x, y) = x^3 - 6x^2y^2 + y^3$  que:

- $u$  es armónica.
- Hallar el conjugado armónico  $v$  /  $F = u + iv$
- Expresar  $F$  en función de  $z$ .

### Desarrollo

$$i) \begin{cases} u_x = 3x^2 - 12xy^2 \\ u_y = -12x^2y + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 3x^2 - 12xy^2 \\ u_y = -12x^2y + 3y^2 \end{cases}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

por lo tanto  $u$  es armónica.

ii)  $\exists F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} / F = u + iv$ , sabemos que:  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ , esto es:

$$v_y = u_x = 3x^2 - 12xy^2, \text{ integrada respecto a } y$$

$$v = \int (3x^2 - 12xy^2) dy + h(x), \text{ de donde}$$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + h(x), \text{ derivando se tiene:}$$

$$v_x(x, y) = 12x^2y - 4y^3 + h'(x) = -u_y = -12x^2y - 4y^3$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C, \text{ de donde } v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + C$$

$$iii) F(z) = u(x, y) + i v(x, y) = x^3 - 6x^2y^2 + y^3 + i(4x^3y - 4xy^3 + C)$$

$$F(z) = (x + iy)^4 + iC = z^4 + iC$$

$$\therefore F(z) = z^4 + iC$$

2) Hallar una función analítica  $F(z)$  tal que:  $\operatorname{Re}(F'(z)) = 3x^2 - 4y - 3y^2$  y  $F(1-i) = 0$

### Desarrollo

$$F(z) = u(x, y) + i v(x, y) \text{ donde } u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{además } F'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \text{ de donde}$$

$$\operatorname{Re}(F'(z)) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 4y - 3y^2, \text{ integrando respecto a } x$$

$$u(x, y) = \int (3x^2 - 4y - 3y^2) dx + C \Rightarrow u(x, y) = x^3 - 4xy - 3xy^2 + C$$

ahora veremos si  $u(x, y)$  es armónico.

$$\begin{cases} u_{xx} = 6x \\ u_{yy} = -6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = 6x \\ u_{yy} = -6y \end{cases} \text{ sumando}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

entonces  $u$  es armónico  $\Rightarrow \exists v$  /  $F = u + iv$ , además  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$   
ecuaciones de Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4y - 3y^2, \text{ integrando respecto a } y$$

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 4y - 3y^2) dy + h(x)$$

$$v = 3x^2y - 2y^2 - y^3 + h(x) \text{ derivando respecto a } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 6xy$$

$$h'(x) = 4x \Rightarrow h(x) = 2x^2 + k$$

$$v(x, y) = 3x^2y - 2y^2 - y^3 + 2x^2 + k$$

$$F(z) = x^3 - 4xy - 3xy^2 + i(3x^2y - 2y^2 - y^3 + 2x^2) + k$$

$$F(1-i) = F(1, -1) = 1 - 4 - 3 + i(3 - 2 - 1 + 2) + k$$

$$-6 + i + (2 + k)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} -6 + k = 0 \\ 2 + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ k = -2 \end{cases}$$

$$F(z) = x^3 - 4xy - 3xy^2 + 6 + i(3x^2y - 2y^2 - y^3 + 2x^2 - 2)$$

$$F(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i$$

$$\text{donde } x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

## 3.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS.

- ① Dada la función  $f(z) = \frac{1}{z}$ , pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de  $f'(z)$ .  
 $\forall z \neq 0$ .

### Desarrollo

$$\text{Sea } z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

$$\text{Como } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = r^{-1} e^{-i\theta} = r^{-1} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\therefore f(z) = r^{-1} (\cos \theta - i \sin \theta) \text{ en coordenadas polares}$$

por otro lado tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \text{ donde}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

como satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann  $\Rightarrow f(z)$  es analítica.



$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \text{ de lo cual}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Observamos que: } \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$  o  $z \neq 0$  donde las derivadas parciales  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  existen y son continuas y verifican las ecuaciones de Cauchy - Riemann por lo tanto  $f'(z)$  existe  $\forall z \neq 0$ .

2. Diga si la función  $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  es analítica.

#### Desarrollo

$f(z)$  es analítica si satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann

como  $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , entonces tenemos:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad y \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

4. Si  $z = \frac{z + \bar{z}}{2}$  y  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Deducir  $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$

#### Desarrollo

Calculando las derivadas  $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$  se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{x(z, \bar{z} + \Delta \bar{z}) - x(z, \bar{z})}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{z + \bar{z} + \Delta \bar{z}}{2} - \frac{z + \bar{z}}{2}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{z}}{2 \Delta z} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{y(z, \bar{z} + \Delta \bar{z}) - y(z, \bar{z})}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{z - \bar{z} - \Delta \bar{z}}{2i} - \frac{z - \bar{z}}{2i}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-\Delta \bar{z}}{2i \Delta z} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial F}{\partial y} \left( \frac{i}{2} \right) = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

5. Si  $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y)$ . Demostrar que  $f'(z)$  existe en todas partes de  $\mathbb{C}$  y hallarse  $f'(z)$ .

#### Desarrollo

Como  $f(z) = e^z (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$ , de donde

$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$  sus primeras derivadas existen y son continuas en el punto  $(x_0, y_0)$ , luego si  $f'(z_0)$  existe en todos los puntos, también

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe y es igual a  $f'(z_0)$ , es decir:

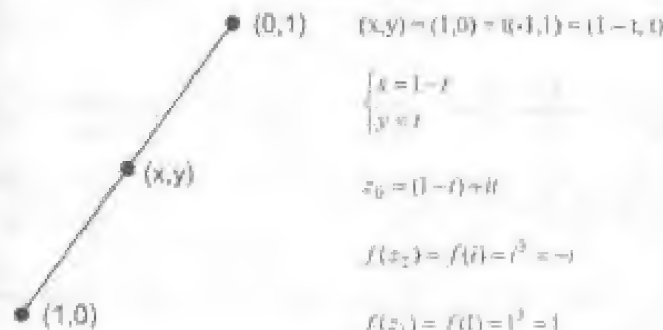
$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{[u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

el límite puede evaluarse en  $x = x_0$ , entonces:

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)}$$

3. Sean  $f(z) = z^3, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = i$ . Pruebe que no existe un punto  $z_0$  sobre el segmento de recta que une a  $z_1$  y  $z_2$  tal que  $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$ . Esto demuestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas.

#### Desarrollo



$$\text{pero } f'(z) = 3z^2 \Rightarrow f'(z_0) = 3[(1-t) + it]^2 \quad \dots (1)$$

$$\text{por otro lado } f'(z_0) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{-i - 1}{i - 1} = i \quad \dots (2)$$

igualando (1) y (2) se tiene:  $3[(1-t) + it]^2 = i$

$$3(1-t)^2 + 2it(1-t) - t^2 = i \Rightarrow 3[1 - 2t + 2it(1-t)] = i$$

$$\frac{3(1-2t) = 0}{t = \frac{1}{2}} \quad \wedge \quad \frac{6t(1-t) = 1}{t = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Si } t = \frac{1}{2} \Rightarrow 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \neq 1$$

Por lo tanto el teorema del valor medio no se cumple.

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + i \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore f'(z) = v_y - i u_y$$

entonces  $f'(z)$  existen en todas partes, ahora hallaremos  $f'(z)$

$$f(z) = e^z (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y, \text{ donde } u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) - i \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

$$\therefore f'(z) = f(z)$$

6. Analizar si la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $(0,0)$ .

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \frac{y^3 - 3x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

#### Desarrollo

De  $f(z)$  se tiene:  $u(x, y) = \frac{x^2 - 3xy^2}{x^2 + y^2}; \quad v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2 y}{x^2 + y^2}$ , donde

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} - 0}{x} = 1$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{y^2} - 0}{y} = 0$$

$$v_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{x^2} - 0}{x} = 0$$

de los resultados de (α) y (β) satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann.

Ahora analizaremos si  $\exists f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z}$$

como  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ,  $\Delta z \rightarrow (0,0)$  horizontalmente  $\Delta y = 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2} = 1$$

$\Delta z \rightarrow (0,0)$  verticalmente  $\Delta x \rightarrow 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(i\Delta y)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^3 i}{i(\Delta y)^2} = 1$$

para  $\Delta x = \Delta y$ ,  $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta x)}{\Delta x + i\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^3 - \Delta x^3}{\Delta x^3 + \Delta x^3} + \frac{\Delta x^3 - 3\Delta x^2}{2(\Delta x)^2}}{\Delta x(1+i)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(1+i)} = \frac{-1}{1+i}$$

$\therefore f'(0)$  no existe

9

Analiza si la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el origen

$$(0,0) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3} + \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3}i & ; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3} & ; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} & ; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$u_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y^3}{y} = 1$$

$$\therefore u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1 \quad \dots (\alpha)$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^4}{y} = -1$$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 0}{x} = 1$$

$$\therefore u_y(0,0) \neq v_x(0,0) = -1 \quad \dots (\beta)$$

por lo tanto de (α) y (β) la función  $f(z)$  satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en (0,0)

10

¿Es analítica  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$ ?

**Desarrollo**

Si  $f(z)$  cumple con las ecuaciones de Cauchy - Riemann  $\Rightarrow f(z)$  es analítica



De la función  $f(z)$  se obtiene:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$u_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad v_y(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ de donde } u_x(x, y) = v_y(x, y)$$

como una de las ecuaciones de Cauchy - Riemann no se verifica es suficiente para decir que  $f(z)$  no cumple las ecuaciones de Cauchy - Riemann por lo tanto  $f(z)$  no es analítica.

- 11) ¿La función  $f(z) = e^{-z}(\cos x + i \sin x)$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ ?

## Desarrollo

Para que  $f(z)$  sea una función analítica debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy -

Riemann:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  de  $f(z) = e^{-z}(\cos x + i \sin x) = e^{-x} \cos x + i e^{-x} \sin x$

se obtiene:  $u(x, y) = e^{-x} \cos x$  y  $v(x, y) = e^{-x} \sin x$ , de donde

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -e^{-x} \sin x \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -e^{-x} \sin x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \dots (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -e^{-x} \cos x \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -e^{-x} \cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene las condiciones de Cauchy - Riemann entonces la función  $f(z) = e^{-z}(\cos x + i \sin x)$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ .

- 12) Si  $F: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , probar que:  $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial w}{\partial \theta}$  donde  $w = F(z)$

## Desarrollo

Mediante las coordenadas conjugadas tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{i}{2} \left[ \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2i} \left[ \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{2} \left[ \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + i \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - i \sin \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - i \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \cos \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\text{pero } u_r = \frac{1}{r} u_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} v_\theta \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} [\cos \theta u_r + \sin \theta v_r + i \cos \theta v_r - i \sin \theta u_r - i \sin \theta u_r + \cos \theta v_r \\ &\quad + \sin \theta v_r + \cos \theta u_r] \\ &= \frac{1}{2} [2 \cos \theta u_r + 2 \sin \theta v_r + 2i \cos \theta v_r - 2i \sin \theta u_r] \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta) u_r + i (\cos \theta - i \sin \theta) v_r \end{aligned}$$

Luego de  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$  se obtiene las funciones componentes

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ por ser analítica } u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial F}{\partial y} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (2)$$

$$\text{Luego de (1) y (2) se tiene: } \therefore \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$$

- 13) Si  $w = f(z)$  es analítica, expresar en coordenadas polares  $(r, \theta)$  y probar que:  $\frac{\partial w}{\partial z} = e^{-i\theta} \frac{\partial w}{\partial r}$

## Desarrollo

$$w = f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = u_r + i v_r$$

como  $f(z)$  es analítica  $\Rightarrow$  cumple con la ecuación de Cauchy - Riemann en coordenadas polares que son  $u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{esto es por coordenadas conjugadas})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\text{Se conoce que: } \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \quad \dots (1)$$

Primero eliminaremos  $v$ , entonces para esto diferenciamos (1) parcialmente respecto a  $r$  y (2) respecto a  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} &= r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \dots (4)$$

Suponiendo que las derivadas parciales son continuas se debe tener que:  $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$

Luego igualando (3) y (4) se tiene:

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \text{ de donde } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

ahora trabajaremos en la misma forma para  $v(r, \theta)$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad \dots (5)$$

$$= e^{-i\theta} u_r + i e^{-i\theta} v_r = e^{-i\theta} (u_r + i v_r) = e^{-i\theta} w_r, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = w_r = e^{-i\theta} w_r$$

- 14 Sea  $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$  una función analítica en un dominio  $D$  que se incluya el origen. Demostrar que las ecuaciones de Laplace en su forma polar, está dado por la función  $u(r, \theta)$  como:  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ , sabiendo que las derivadas parciales son continuas. De igual forma pruebe para  $v(r, \theta)$ .

**Desarrollo**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad \dots (8)$$

como las derivadas parciales son continuas se tiene que:  $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$

Luego igualando (7) y (8) y se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial v}{\partial r} - r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \text{ de donde } r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$$

- 15 Demuestre que la función  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  no posee derivadas en ningún valor de  $z$ .

**Desarrollo**

Sea  $z = x + iy$  un punto cualquiera del plano complejo  $C$ , entonces elegimos una vecindad cualquiera  $v_r(z)$  de  $z$  y dos puntos  $z'_1 = (x, y+k)$  u  $z'_2 = (x+k, y)$ ,  $k \neq 0$  que estarán en  $v_r(z)$

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{x' - x}{(x' - x) + i(y' - y)}$$

calculando el valor cuando  $z' = z'_1$  y después  $z' = z'_2$

$$\lim_{(x', y') \rightarrow (x, y+k)} \frac{x' - x}{(x' - x) + i(y' - y)} = \frac{x - x}{(x - x) + i(y + k - y)} = \frac{0}{ik} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\lim_{(x', y') \rightarrow (x+k, y)} \frac{x' - x}{(x' - x) + i(y' - y)} = \frac{x + k - x}{x + k - x + i(y - y)} = \frac{k}{k} = 1 \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) se concluye que  $\nexists \lim_{z' \rightarrow z} \frac{\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Re}(z)}{z' - z}$  esto demuestra que  $f(z)$  no posee derivado en ningún punto del plano  $C$ .

$$\text{de (1) y (2) se tiene: } \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = r \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \quad \dots (6)$$

diferenciando (5) respecto a  $\theta$  y (6) respecto a  $r$ , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -r \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} (-r) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial v}{\partial r} - r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

- 16 Demuestre que si la función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es derivable en el punto  $z = x + iy$ , entonces se satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el punto  $z$

**Desarrollo**

Como  $f(z)$  es derivable en  $z$  entonces  $\exists f'(z)$  es decir:

$$f'(z) = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{[u(x', y') - u(x, y)] + i[v(x', y') - v(x, y)]}{(x' - x) + i(y' - y)}$$

Si a este límite evaluamos de dos formas para  $z' = x$  entonces:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{[u(x, y') - u(x, y)] + i[v(x, y') - v(x, y)]}{(x - x) + i(y' - y)} \\ &= \lim_{y' \rightarrow y} \frac{u(x, y') - u(x, y)}{i(y' - y)} + i \lim_{y' \rightarrow y} \frac{v(x, y') - v(x, y)}{y' - y} \\ &= -i \lim_{y' \rightarrow y} \frac{u(x, y') - u(x, y)}{y' - y} + i \lim_{y' \rightarrow y} \frac{v(x, y') - v(x, y)}{y' - y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \text{ es decir:} \\ f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

evaluando para  $y' = y$  entonces:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{[u(x', y) - u(x, y)] + i[v(x', y) - v(x, y)]}{x' - x + i(y - y)} \\ &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{u(x', y) - u(x, y)}{x' - x} + i \lim_{x' \rightarrow x} \frac{v(x', y) - v(x, y)}{x' - x} \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

comparando (1) y (2) se obtiene:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

esto demuestra que si  $f'(z)$  existe en el punto  $z$  entonces las ecuaciones de Cauchy - Riemann se verifican en ese punto.

- 17 Si la función  $f(z)$  es analítica en  $z_0$ . Demuestre que  $f(z)$  es continua en  $z_0$ .

**Desarrollo**

A la expresión  $f(z_0 + h) - f(z_0)$ , escribiremos en la forma

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} h \text{ donde } h = \Delta z \neq 0 \text{ entonces tomando límite}$$

ambos miembros cuando  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(z_0) - 0 = 0, \text{ puesto que } f'(z_0) \text{ existe por hipótesis entonces:} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$$

con lo cual queda demostrado que  $f(z)$  es continua en  $z_0$ .

- 18 Dar un ejemplo que la afirmación del ejercicio (17) no es necesariamente cierta

- 19 Comprobar que  $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$  es armónica, hallar su conjugado armónico  $v$  tal que  $F = u + iv$  y expresar  $F$  en función de  $z$ .

**Desarrollo**

$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$ ; calculando sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xe^{x^2 - y^2} \cos(2xy) - 2ye^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2ye^{x^2 - y^2} \cos(2xy) - 2xe^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 4x^2 e^{x^2 - y^2} \cos(2xy) - 4xe^{x^2 - y^2} \sin(2xy) - 4ye^{x^2 - y^2} \sin(2xy) - 4y^2 e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 4y^2 e^{x^2 - y^2} \cos(2xy) + 4xe^{x^2 - y^2} \sin(2xy) + 4xe^{x^2 - y^2} \sin(2xy) - 4x^2 e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$$



### Desarrollo

La función  $f(z) \approx \bar{z}$  es continua en  $z_0$ , sin embargo por el ejemplo (2) de (3.9)  $f(z) = \bar{z}$  no es analítica en ninguna parte, esto indica que una función continua no necesariamente debe ser analítica.

(19)

Demostrar que:  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

### Desarrollo

Sea  $w = \ln y$  donde  $y = f(z)$ , aplicando regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad w = \ln y = \ln(f(z))$$

$$2xe^{x^2-y^2} \sin 2xy + 2ye^{x^2-y^2} \cos 2xy + g'(x) = 2xe^{x^2-y^2} \sin 2xy - 2ye^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

de donde  $g'(x) = 0$  entonces  $g(x) = C$

$$v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy + C$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy - ie^{x^2-y^2} \sin 2xy + iC$$

$$= e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy) + i = e^{x^2-y^2} e^{i2y} + iC = e^{x^2-2iy+y^2} + iC$$

$$= e^{(x+iy)^2} + iC = z^2 + iC$$

(21)

Determina si la función  $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - y^3$  es armónica, de ser afirmativa, calcular el conjugado armónico  $v(x, y)$ . Expresar  $F = u + iv$  en función de  $z$ .

### Desarrollo

$$u(x, y) \text{ es armónica si } \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

como  $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - y^3$  entonces

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 6y + 4$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 4y - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 4 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 6y + 4 - 4 - 6y = 0$$

como  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$  entonces  $u(x, y)$  es armónica

$$F \text{ es analítica si y sólo si } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 6y + 4x, \text{ integrando respecto a } y$$

$$v(x, y) = \int (6xy + 4x) dy + g(x) = 3xy^2 + 4xy + g(x), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 3y^2 + 4y + g'(x) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -(4y - 3y^2)$$

$$g'(x) = -3x^2 \text{ de donde } g(x) = -x^3$$

$$\therefore v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3$$

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - y^3) + i(3xy^2 + 4xy - x^3)$$

$$= -(x^2 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + (2x^2 + 4xyi - 2y^2) = -(x + iy)^3 + 2(x + iy)^2$$

$$= -z^3 + 2z^2 \quad \therefore F(z) = -z^3 + 2z^2$$

(22)

Analizar si la función  $u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$  es armónica.

### Desarrollo

$$u(x, y) \text{ es armónica si se cumple: } \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2ye^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) - 2ye^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = -4x^2 e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + e^{-2xy} (2 - 4xy) \cos(x^2 - y^2) - 4xy e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + 4y^2 e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = (y^2 - x^2) 4e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + (2 - 8xy) e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2xe^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) - 2xe^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -4y^2 e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + (4xy - 2xy^2) \cos(x^2 - y^2) + 4xy e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + 4x^2 e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 4(x^2 - y^2) e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) + (8xy - 2xy^2) \cos(x^2 - y^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = u_y = 2 - 2y, \text{ integrando respecto a } x$$

$$v(x, y) = \int (2 - 2y) dx + g(y) = 2x - y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0 + g'(y) = -u_x = -(2 - 2y) = 2y$$

$$g'(y) = 2y \text{ de donde } g(y) = y^2$$

$$v(x, y) = 2x - y^2 + y^2$$

por lo tanto  $u(x, y) = e^{-2x} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$  es armónica.

- a) Probar que  $u(x, y) = 2x - 2xy$  es armónica.  
 b) Encontrar  $V(x, y)$  tal que  $F = u + iv$ .  
 c) Expresar  $F$  en términos de  $z$ .

#### Desarrollo

a)  $u(x, y)$  es armónica si se cumple  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$

$$u(x, y) = 2x - 2xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{de donde } \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x, y) \text{ es armónica}$$

b)  $F = u + iv$  es analítica y solo si  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$

c)  $F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2x - 2xy + i(2y - y^2 + x^2)$

$$= 2(x + iy) + i(x + iy)^2 = 2z + z^2$$

$$\therefore F(z) = 2z + iz^2$$

Si  $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$  entonces:

- i) Verificar si  $u(x, y)$  es armónica.  
 ii) Hallar el conjugado armónico  $V$  tal que  $F = u + iv$ .  
 iii) Expresar  $F$  en función de  $z$ .

#### Desarrollo

i)  $u(x, y)$  es armónica si se cumple  $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$

$$u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) + e^{-x} \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) - e^{-x} \operatorname{sen} y - e^{-x} \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y - 2 \operatorname{sen} y) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \operatorname{sen} y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \operatorname{sen} y + x \cos y + 2 \operatorname{sen} y) \quad \dots (2)$$

ahora sumando (1) y (2) se tiene

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x, y) \text{ es armónica}$$

- ii)  $\exists V$  tal que  $F = u + iv$  es analítica entonces cumple con las ecuaciones de Cauchy Riemann.

$u_x = v_y$  y  $u_y = -v_x$  entonces se tiene:

$v_y = u_x = e^{-x}(-x \operatorname{sen} y + y \cos y + \operatorname{sen} y)$ , integrando

$$v(x, y) = \int e^{-x}(-x \operatorname{sen} y + y \cos y + \operatorname{sen} y) dy + g(x)$$

$v(x, y) = e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y) + g(x)$ , derivando

$v_x = e^{-x} \cos y - e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y) + g'(x) = -u_y$

$e^{-x}(\cos y - x \cos y + y \operatorname{sen} y) + g'(x) = e^{-x}(x \cos y - \cos y + y \operatorname{sen} y)$

$g'(x) = 0$  de donde  $g(x) = c$

$v(x, y) = e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y) + c$

iii)  $F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y) + ie^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y) + ic$   
 $= e^{-x}[\operatorname{sen} y(x + iy) + i \cos y(x + iy)] + ic = e^{-z}[z \operatorname{sen} y + i \cos y] + ic$

$$= ie^{-x}(x \operatorname{sen} y + i \cos y) + ic = ixe^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y) + ic$$

$$= ixe^{-x}e^{-iy} + ic = ixe^{-i(x+iy)} + ic = ixe^{-z} + ic$$

$$\therefore F(z) = ixe^{-z} + ic$$

Si  $f$  es una función analítica, demostrar que:  $(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|)^2 + (\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|)^2 = \|f'(z)\|^2$

#### Desarrollo

Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow \|f(z)\| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\| = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = \frac{u(x, y)u_x(x, y) + v(x, y)v_x(x, y)}{\sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|\right)^2 = \frac{(u(x, y)u_x(x, y) + v(x, y)v_x(x, y))^2}{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\| = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = \frac{u(x, y)u_y(x, y) + v(x, y)v_y(x, y)}{\sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|\right)^2 = \frac{(u(x, y)u_y(x, y) + v(x, y)v_y(x, y))^2}{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \quad \dots (2)$$

ahora sumamos (1) y (2) es decir:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|\right)^2 = \frac{(u(x, y)u_x(x, y) + v(x, y)v_x(x, y))^2 + (u(x, y)u_y(x, y) + v(x, y)v_y(x, y))^2}{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

como  $f$  es analítica, entonces se cumple las ecuaciones de Cauchy - Riemann:

$u_x(x, y) = v_y(x, y)$ ;  $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|\right)^2 =$$

$$(u(x, y)v_y(x, y) + v(x, y)v_x(x, y))^2 + (u(x, y)v_x(x, y) - v(x, y)v_y(x, y))^2$$

Utilice la definición de derivada para evaluar  $f'(z_0)$  o para probar que  $f'(z_0)$  no existe

a)  $f(z) = z^2$ ,  $z_0 = 1 + i$

b)  $f(z) = z + 2\bar{z}$ ,  $z_0 = 3i$



$$u^2(x, y) + v^2(x, y)$$

$$= \frac{u^2(x, y)v_1^2(x, y) + v^2(x, y)v_1^2(x, y) + v^2(x, y)v_2^2(x, y) + u^2(x, y)v_2^2(x, y)}{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

$$= \frac{u^2(x, y)(v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y)) + v^2(x, y)(v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y))}{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

$$= \frac{(u^2(x, y) + v^2(x, y))(v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y))}{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y) \quad \dots (3)$$

Sabiendo que:  $f'(z) = u_x(x, y) + iv_y(x, y) \Rightarrow \|f'(z)\| = \sqrt{u_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$

Entonces:  $\|f'(z)\|^2 = v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y)$

Por las ecuaciones de Cauchy - Riemann se tiene:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad \text{en (3)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|\right)^2 = v_y^2(x, y) + v_x^2(x, y) = u_y^2(x, y) + v_x^2(x, y) = \|f'(z)\|^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \|f(z)\|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \|f(z)\|\right)^2 = \|f'(z)\|^2$$

### 3.12. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea  $f(z) = \bar{z}$ , pruebe que  $f'(i)$  no existe
2. Sea  $f(z) = \|z\|^2$ , sostenemos que  $f$  es derivable en cero y  $f'(0) = 0$ , pero  $f$  no es derivable.

13. Calcular las derivadas de:
  - a)  $f(z) = 4z^3 + 4z^2 + iz - 10$
  - b)  $f(z) = (z^2 - 3i)^{10}$
  - c)  $f(z) = \frac{z^2 - 9}{iz^3 + 2z + \pi}$
  - d)  $f(z) = \frac{(z + 2)^2}{(z^2 + i - 1)^4}$
14. Hallar el valor de:  $f'(z) = e^{x^2 - y^2} [\cos(2xy) + i \sin(2xy)]$
15. Si  $f(z)$  es una función regular de  $z$ , probar que:  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \|f(z)\|^2 = \|f'(z)\|^2$
16. Un punto  $z = re^{i\theta}$  se mueve en el plano de las  $z$  siendo  $r$  y  $\theta$  funciones de  $t$ . Hallar el valor de la velocidad y la aceleración de el punto para cualquier instante  $t$ .
17. Sea  $u$  y  $v$  las componentes real e imaginaria de la función  $f$  definida por la ecuación:  $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z} & \text{cuando } z \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } z = 0 \end{cases}$ . Verificar que las ecuaciones de Cauchy - Riemann se satisfacen en el origen  $z = (0, 0)$  y demostrar que  $f'(0)$  no existe.
18. Pruebe si las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el origen, si lo son, pruebe que no son derivables en dicho punto:
  - a)  $f(z) = \begin{cases} \frac{z^k}{\|z\|^k} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$
  - b)  $f(z) = \begin{cases} \frac{i \operatorname{Re}(z^2)}{\|z\|^k} + i \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{\|z\|^k} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$
19. Sea  $f(z) = \frac{xy^2(x + iy)}{x^2 + y^4}$  si  $z \neq 0$  y  $f(0) = 0$  analizar con detalle:
  - a) Las partes real e imaginaria de  $f(z)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el origen.
  - b)  $\exists f'(0)$ ?

$$i) f(z) = \frac{z}{1+z}, z_0 = 2$$

$$d) f(z) = (\bar{z})^2, z_0 = 2-i$$

4.  $G(z) = \|z\|$  es derivable en  $z = 0$ ?
5. Si  $F(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de  $f'(z)$
6. Si  $w = \operatorname{arccos}(z - i)$ ,  $z = \sinh(3u + 2i)$  y  $u = \sqrt{t}$ , hallar  $\frac{dw}{dt}$
7. En la función  $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Determinar los puntos donde  $f(z)$  es derivable (demuestre su respuesta).
8. Si  $\operatorname{Im}(F(z)) = 3x^2y + 2xy - y^3$ , hallar una función analítica  $F = u + iv$  si  $F(0) = 1 + i$  expresar  $F$  en función de  $z$ .
9. ¿Las funciones dadas son derivables en algún punto de  $\mathbb{C}$ ?
  - a)  $f(z) = \|z\|$
  - b)  $f(z) = \bar{z}$
  - c)  $f(z) = \bar{z}^2$
  - d)  $f(z) = \operatorname{Im}(z)$
  - e)  $f(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$
10. ¿ $f(z) = y + xy^2i$  es derivable en algún punto de  $\mathbb{C}$ ?
11. Halle los puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$ , donde la función  $f(z) = \frac{xy + ix}{1 + iz}$  es derivable respecto a la variable  $z$ .
12. Si  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / F = u + iv$ , donde  $u$  y  $v$  tiene derivadas parciales continuas en un abierto  $D$ , probar que:  $\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right)$

20. Dada la función  $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{\|z\|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$  analizar si:
  - a)  $f$  satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $(0, 0)$ .
  - b)  $\exists f'(0)$ ?
21. Dada la función compleja  $f(z)$  definida por:  $f(z) = \begin{cases} \frac{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 
  - a) Determinar si las funciones componentes  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  de la función  $f(z)$  satisfacen las condiciones de Cauchy - Riemann en el origen.
  - b)  $\exists f'(0)$ ?
22. Muestre que la función  $f(z) = \begin{cases} z \frac{1}{z^4} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $z = 0$ , pero no tiene derivada en ese punto.
23. Dada la función  $f(z)$  definida por:  $f(z) = \begin{cases} \frac{z^k}{\|z\|^k} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ , determinar si:
  - a)  $f$  satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $(0, 0)$ .
  - b)  $\exists f'(0, 0)$ ?
24. Sea  $u$  y  $v$  los componentes real e imaginaria de la función  $f$  definida por la ecuación:  $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^3}{z} & \text{cuando } z \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } z = 0 \end{cases}$ . Verificar que las condiciones de Cauchy - Riemann se satisfacen en el origen  $z = (0, 0)$  y demostrar que  $f'(0, 0)$  no existe.

- 25) Dada la función  $f(z)$  definida por:  $f(z) = \begin{cases} \frac{(z)^4}{\|z\|^3} & : z \neq 0 \\ 0 & : z = 0 \end{cases}$ , analizar si  $f$  satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en el origen  $z = (0,0)$  y averiguar si existe  $f'(0,0)$ .
- 26) Analizar si las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $(0,0)$  ¿Son derivables en dicho punto?
- a)  $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- b)  $f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + i \frac{y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- 27) Sea  $f(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ , Pruebe que dicha función satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann.
- 28) Analizar si la función dada satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en  $(0,0)$  ¿Es derivable en dicho punto?
- $f(z) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^6 + y^6} + i \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- 29) Pruebe que cada función satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann.
- a)  $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$       b)  $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$
- 30) Analizar si la función  $f(z) = \|z\|^3$  es analítica.
- 31) ¿La función  $f(z) = e^{-z} (\cos x + i \operatorname{sen} x)$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ ?
- 32) Si  $\operatorname{Im}(f'(z)) = 3x^2 y + 2xy - y^3$ , hallar una función analítica  $f = u + iv$  si  $f(0) = 1$  y expresar  $f$  en al función de  $z$ .

- 33) Sea  $\operatorname{Re}(f'(z)) = 3x^2 - 4y - 3y^2$  y  $f(1-i) = 0$ , Hallar la función  $f$ .
- 34) Diga si  $f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$  es analítica.
- 35) Demostrar que las siguientes funciones no son analíticas en ningún punto.
- a)  $f(z) = xy + iy$       b)  $f(z) = e^{-1} e^{iy}$
- 36) Comprobar que cada una de las funciones dadas son enteras.
- a)  $f(z) = 3x + y - i(3y - x)$       b)  $f(z) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y + i \cos x \operatorname{senh} y$
- c)  $f(z) = e^{-x} e^{iy}$       d)  $f(z) = (z^2 - 2)e^{-1} e^{-iy}$
- 37) Demostrar que la función  $f(z) = \|z\|^4$  es derivable en el punto  $z = 0$ , pero no es analítica en ese punto.
- 38) Si  $f(z) = u + iv$  es una función entera y  $u^2 = v^2$ , Demuestre que  $f$  es una función constante.
- 39) Si  $f(z) = u + iv$  es una función entera y  $v = u^2$ , Demuestre que  $f$  es una función constante.
- 40) Si  $f(z) = u + iv$  y  $f(z) = u - iv$  son analíticas. Pruebe que  $f$  es una función constante.
- 41) Sea  $f(z) = u + iv$  es una función entera y supongamos que  $u, v$  es constante, pruebe que  $f$  es una función constante.
- 42) Diga si la función  $f(z)$  definida por:
- $f(z) = \operatorname{sen}(\frac{x}{x^2 + y^2}) \cosh(\frac{y}{x^2 + y^2}) - i \cos(\frac{x}{x^2 + y^2}) \operatorname{senh}(\frac{y}{x^2 + y^2})$  es analítica.
- 43) Pruebe que las funciones dadas son enteras.
- a)  $f(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$       b)  $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$
- c)  $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$       d)  $f(z) = (x^2 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$
- e)  $f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + i \cos(x^2 - y^2) \operatorname{senh}(2xy)$

- 44) Diga si las siguientes funciones son analíticas.
- a)  $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$
- b)  $f(z) = \operatorname{sen}(\frac{x}{x^2 + y^2}) \cosh(\frac{y}{x^2 + y^2}) - i \cos(\frac{x}{x^2 + y^2}) \operatorname{senh}(\frac{y}{x^2 + y^2})$
- 45) Determinar si la función  $u(x, y) = 3x^2 y + 2x^2 - 2y^3 - y^3$  es armónica, de ser afirmativo, calcular el conjugado armónico  $v(x, y)$  y expresar  $F = u + iv$  en función de  $z$ .
- 46) Si  $v(x, y) = e^{-y} \cos(x^2 - y^2)$ .
- a) Verificar que  $v(x, y)$  es armónica.
- b) Hallar el conjugado armónico  $u$  tal que  $F = u + iv$
- c) Expresar  $F$  en función de  $z$ .
- 47) Analizar si las siguientes funciones son armónicas, de ser afirmativo, hallar la función conjugada  $V(x, y)$  armónica tal que  $F = u + iv$ .
- a)  $u(x, y) = x^3 - 6x^2 y^2 + y^4$       b)  $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y$
- c)  $u(x, y) = e^{-2y} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$       d)  $u(x, y) = e^{x^2 \operatorname{sen} y} \cos(e^x \operatorname{sen} y)$
- 48) Analizar si las funciones  $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $v(x, y) = e^x$  son armónicas, en caso de serlo, determinar una función analítica  $f(z)$  en términos de  $z$ .

- 49) Probar que si tanto la parte real como imaginaria de una función analítica tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces estas satisfacen la ecuación de Laplace
- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$
- 50) Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica en la región  $D$  y si  $\|f(z)\| = \text{constante}$ , entonces demostrar que  $f(z) = \text{constante}$ ,  $\forall z \in D$ .
- 51) Sea  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función analítica en el dominio  $D$ , explicar porque las funciones  $u(x, y) = e^{u(x, y)} \cos(v(x, y))$ ,  $v(x, y) = e^{u(x, y)} \operatorname{sen}(v(x, y))$  son armónicas en  $D$  y porque  $v(x, y)$  es de hecho una armónica conjugada de  $u(x, y)$ .
- 52) Hallar la función analítica  $f$  en términos de  $z$  a partir de  $\operatorname{Re}(f'(z)) = 6xy + 3x^2 - 3y^2$ ,  $f(1-i) = 2i$ .
- 53) Si  $f(z)$  es una función regular (analítica u holomorfa), Probar que  $\nabla^2 \|f(z)\|^2 = 4 \|f'(z)\|^2$ , usando este resultado deducir una fórmula para  $\nabla^4 \|f(z)\|^2$ .



(49) Si  $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son conjugados armónicos. Probar que:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

(50) Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son armónicos, decir si las funciones  $f(g(z))$ ,  $f(z)g(z)$  y  $f(z) + g(z)$  son armónicos justifique su respuesta.

## CAPÍTULO IV

### 4. LAS FUNCIONES TRASCENDENTES BÁSICAS.

#### 4.1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

La función  $f: \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(z) = \exp(z) = e^z$  se llama función exponencial en  $z$ .

Si  $z = x + iy$  entonces  $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ .

cuando  $y = 0$ , entonces  $f(z) = e^x$  se reduce a la exponencial real.

cuando  $x = 0$ , entonces  $f(z) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ , se obtiene la fórmula de Euler.

#### 4.2. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

(1) La función exponencial  $f(z) = e^z$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ .

##### Demostración

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y, \text{ de donde}$$

$u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ , son continuas en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y \end{aligned}$$

estas funciones son continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{como } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(4)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ .

##### Demostración

$$e^{z_1} = e^{x_1+iy_1} = e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)$$

$$e^{z_2} = e^{x_2+iy_2} = e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$$

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{(x_1+x_2)} e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

(5)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \forall z \in \mathbb{C}$ .

##### Demostración

$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{x+iy}} = \frac{e^{-z}}{\cos y + i \sin y} = e^{-x} (\cos y - i \sin y) = e^{-x} e^{-iy} = e^{-(x+iy)} = e^{-z}$$

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}, \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces  $f(z) = e^z$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$ , además:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$\therefore f'(z) = e^z$$

$$(2) e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

##### Demostración

Sabemos que:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \dots$$

$$e^{iy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y$$

$$\therefore e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = e^{i(-y)} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

(3)  $\|e^z\| > 0, \forall z \in \mathbb{C}$

##### Demostración

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\|e^z\| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x = e^{Re(z)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \|e^z\| > 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

(6)  $(e^z)^n = [e^x (\cos y + i \sin y)]^n, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

##### Demostración

$$(e^z)^n = [e^x (\cos y + i \sin y)]^n = [e^x (\cos y + i \sin y)]^n$$

$$= [e^x (\cos \frac{y+2k\pi}{n} + i \sin \frac{y+2k\pi}{n})]^n$$

$$= e^{nx} [\cos \frac{y+2k\pi}{n} + i \sin \frac{y+2k\pi}{n}]^n$$

$$= e^{nx} \frac{e^{i(y+2k\pi)}}{n} = e^{nx} \frac{e^{iy} e^{i2k\pi}}{n} = e^{nx} \frac{e^{iy} (1+2k\pi i)}{n} = e^{nx} e^{iy} = e^{z}$$

$$\therefore (e^z)^n = e^{nz}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

(8)  $e^z = \overline{e^{\bar{z}}}, \forall z \in \mathbb{C}$

##### Demostración

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\frac{e^{i\pi}}{e^{i\pi}} = e^i \cdot \frac{1}{e^i} = e^{i\pi} e^{-i\pi} = e^{i\pi-i\pi}$$

$$\therefore \frac{e^i}{e^i} = e^{i-i\pi}$$

$$\textcircled{6} \quad (e^i)^n = e^{in}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

#### Demostración

$$(e^i)^n = [e^i (\cos y + i \sin y)]^n = e^{in} [\cos ny + i \sin ny] = e^{in} [e^{in}] = e^{in+in} = e^{2in}$$

$$= (e^i)^n = e^{in}$$

al restar (1) y (2) se tiene:  $e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$

de donde

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

a) **DEFINICIÓN.**  $\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ , definimos las funciones

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

que son analíticas  $\forall z \in \mathbb{C}$

como son analíticas  $\forall z \in \mathbb{C}$  estas funciones son enteras y además satisfacen

$$(\sinh z)' = \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2i} \right)' = \frac{ie^z + ie^{-z}}{2i} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

$$(\sinh z)' = \cosh z$$

$$(\cosh z)' = \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)' = \frac{ie^z - ie^{-z}}{2} = i \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \sinh z$$

$$(\cosh z)' = i \sinh z$$

Las otras cuatro funciones trigonométricas son definidas en términos de las funciones  $\sinh z$  y  $\cosh z$  por medio de las relaciones usuales.

$\operatorname{tg} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$ ,  $\operatorname{ctg} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ ,  $\sec z = \frac{1}{\cosh z}$ ,  $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sinh z}$  estas funciones son analíticas, excepto donde se anulan sus denominadores, además satisfacen la regla de la derivación.

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} z)' &= \sec^2 z & (i \operatorname{tg} z)' &= -\operatorname{cosec}^2 z \\ (\sec z)' &= \sec z \operatorname{tg} z & (\cosh z)' &= i \sinh z \end{aligned}$$

De la definición de  $\cosh z$ , se tiene

$$\cosh z = \cosh(x + iy) = \frac{e^{(1+i)y} + e^{-(1+i)y}}{2} = \frac{e^x (\cos x + i \sin x) + e^{-x} (\cos x - i \sin x)}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos x + i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin x$$

$$= \cosh x \cos x + i \sinh x \sin x = \cosh x \cosh iy + i \sinh x \sinh iy = \cosh z$$

$$\therefore \cosh z = \cosh z$$

#### 4.4. FUNCIONES HIPERBÓLICAS COMPLEJAS.

$\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ , definimos las funciones

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

que son funciones analíticas  $\forall z \in \mathbb{C}$

#### 4.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O FUNCIONES CIRCULARES COMPLEJAS.

$$\text{Se conoce que: } \begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y & (1) \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y & (2) \end{cases}$$

sumando (1) y (2) se tiene:  $e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y$

de donde:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{i(1+i)y} + e^{-i(1+i)y}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}] = \frac{1}{2} [e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)]$$

$$= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x$$

$$\cos z = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x$$

en forma similar es para  $\sin z$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{i(1+i)y} - e^{-i(1+i)y}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i} [e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x)]$$

$$= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

$$\sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

**Ejemplo.** Calcular  $\|\sin z\|$

#### Desarrollo

Sea  $f(z) = \sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$

$$\|\sin z\| = \sqrt{\cosh^2 y \sin^2 x + \sinh^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(1 + \sinh^2 y) \sin^2 x + \sinh^2 y (1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

**Ejemplo.** Probar que  $\cosh z = \cosh z$

#### Desarrollo

Luego las funciones hiperbólicas complejas están relacionadas con las funciones trigonométricas complejas, puesto que al multiplicar por  $i$  simplemente se rota todo vector en  $\mathbb{C}$  por  $90^\circ$  en sentido antihorario.

**OBSERVACIÓN.** Las identidades y las reglas usuales de la derivación se aplican a las funciones hiperbólicas complejas.

$$\textcircled{1} \quad f(z) = \sinh z \text{ entonces } f'(z) = \cosh z$$

$$\textcircled{2} \quad f(z) = \cosh z \text{ entonces } f'(z) = \sinh z$$

$$\textcircled{3} \quad f(z) = \operatorname{tg} h z \text{ entonces } f'(z) = \sec h^2 z$$

$$\textcircled{4} \quad f(z) = \operatorname{ctg} h z \text{ entonces } f'(z) = -\operatorname{cosec}^2 h z$$

$$\textcircled{5} \quad f(z) = \operatorname{sech} z \text{ entonces } f'(z) = -\operatorname{sech} z \operatorname{tg} h z$$

$$\textcircled{6} \quad f(z) = \operatorname{cosech} z \text{ entonces } f'(z) = -\operatorname{cosech} z \operatorname{ctg} h z$$



Las otras funciones hiperbólicas son definidas en términos de  $\sinh z$  y  $\cosh z$  por medio de las relaciones usuales.

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \text{son funciones analíticas } \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \cosh z \neq 0$$

$$\operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}, \quad \text{son funciones analíticas}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\sinh z \neq 0$ , observemos lo siguiente:

$$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{\cos iz + i \sin iz - \cos iz + i \sin iz}{2} = \frac{2i \sin iz}{2} = i \sin iz$$

$$\therefore \sinh iz = i \sin z$$

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\cos iz + i \sin iz + \cos iz - i \sin iz}{2} = \frac{2 \cos iz}{2} = \cos iz$$

$$\therefore \cosh iz = \cos z$$

Luego  $u = \ln r = \ln \|z\| \wedge v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como  $\log z = w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

a) **DEFINICIÓN.**  $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ , definimos la función logaritmo en la forma siguiente:

$$\log z = \ln \|z\| + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \text{ donde } \theta = \arg(z)$$

La función  $\log$  es multivaluada (tiene infinitud de valores). Si  $k=0$  entonces

$$\log z = \ln \|z\| + i\theta$$

Se llama valor o rama principal del logaritmo de  $z$

**OBSERVACIÓN.**

$$\textcircled{1} \text{ Si } z = \|z\| e^{i\theta} \Rightarrow \ln z = \ln \|z\| + i \ln e^{i\theta}$$

$$\ln z = \ln \|z\| + i\theta$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } f(z) = w = \ln z$$

$$e^w = e^{\ln z} = e^{\ln \|z\| + i\theta} = e^{\ln \|z\|} \cdot e^{i\theta} = \|z\| e^{i\theta} = z \quad \therefore e^{\ln z} = z$$

#### 4.6. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA.

Consideremos  $x, w \in \mathbb{C}$  una constante compleja

$$\textcircled{1} \ln(xw) = \ln x + \ln w$$

$$\textcircled{2} \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w$$

$$\textcircled{3} \ln z^n = n \ln z$$

$$\textcircled{4} z^C = e^{C \ln z}, C \text{ constante compleja}$$

**Demostración**

$$\textcircled{1} \text{ Sea } z = \|z\| e^{i\theta_1}, w = \|w\| e^{i\theta_2}, \text{ entonces:}$$

$$zw = \|z\| \|w\| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \text{ tomando logaritmo } \ln zw = \ln \|z\| + \ln \|w\| + i(\theta_1 + \theta_2)$$

$$2) \text{ Calcular } \ln z \text{ donde } z = 1 + i\theta$$

**Desarrollo**

$$\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{\theta}{1}\right) = \theta^\circ \text{ y } \|z\| = r = \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$\ln z = \ln \|z\| + i(\theta + 2k\pi)$$

$$\ln 1 = \frac{\ln 1 + 2k\pi i}{0} \Rightarrow \ln 1 = 2k\pi i, \text{ el valor principal de } \ln z \text{ es: } \ln 1 = 0 \text{ para } k=0$$

$$\text{Calcular } \ln i$$

#### 4.5. LA FUNCIÓN LOGARITMO Y SUS RAMAS.

Sea  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ . Si  $z = e^w$ , entonces definimos  $w$  como el logaritmo natural de  $z$  que denotaremos por  $\log z = w$ , conociendo  $z$  podemos determinar  $w$ , número finito de valores correspondientes para  $w$ .

Ahora escribimos  $w = u + iv, z = x + iy$ , de donde

$$z = x + iy = \|z\| e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ para } -\pi \leq \theta \leq \pi \text{ (o } 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Luego entonces se tiene:

$$z = e^w \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

$$e^u = r \wedge \cos v = \cos \theta \wedge \sin v = \sin \theta$$

$$\ln e^u = \ln r \wedge v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$u \ln e = \ln r \wedge v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln zw = [\ln \|z\| + i\theta_1] + [\ln \|w\| + i\theta_2] = \ln z + \ln w$$

$$\therefore \ln zw = \ln z + \ln w$$

$$\textcircled{2} \text{ Sea } z = \|z\| e^{i\theta_1}, w = \|w\| e^{i\theta_2}, \text{ entonces:}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\|z\| e^{i\theta_1}}{\|w\| e^{i\theta_2}} = \frac{\|z\|}{\|w\|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \text{ tomando logaritmo}$$

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln \frac{\|z\|}{\|w\|} + i(\theta_1 - \theta_2) = [\ln \|z\| + i\theta_1] - [\ln \|w\| + i\theta_2] = \ln z - \ln w$$

$$\therefore \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w$$

$$\textcircled{3} \text{ Sea } z = \|z\| e^{i\theta} \text{ entonces } z^n = \|z\|^n e^{in\theta}$$

$$\ln z^n = \ln \|z\|^n + in\theta = n \ln \|z\| + in\theta = n[\ln \|z\| + i\theta] = n \ln z$$

$$\ln z^n = n \ln z$$

**Ejemplos.**

$$1) \text{ Calcular } \ln(1 + i\sqrt{3})$$

**Desarrollo**

$$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln \|1 + i\sqrt{3}\| + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \text{ donde}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ por lo tanto:}$$

$$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln \|1 + i\sqrt{3}\| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z}$$

(tiene infinitos resultados por que  $k=0, 1, 2, \dots$ )

$$\text{El valor principal de } \ln(1 + i\sqrt{3}) \text{ es: } \ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}, \text{ cuando } k=0$$

$$zw = -1 \Rightarrow \ln zw = \ln \| -1 \| + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln zw = i(\pi + 2\pi)$$

$\rightarrow \textcircled{2}$

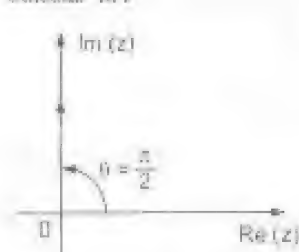
al comparar  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  observamos que:  $\ln zw \neq \ln z + \ln w, \forall k \neq 0$

#### 4.7. TEOREMA.

Sean  $z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0, w \neq 0, \theta = \arg z, \varphi = \arg(w)$  entonces:

$$\ln z + \ln w = 2k\pi i, -\pi < \theta + \varphi \leq 2\pi$$

$$\ln zw = \ln \|z\| + \ln \|w\| + i(\theta + \varphi + 2k\pi)$$



**Desarrollo**

$$\ln i = \ln \|i\| + i(\theta + 2k\pi)$$

$$\ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow \ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

el valor principal  $\ln i = \frac{\pi}{2}i$  cuando  $k=0$

**Desarrollo**

$$\ln(-1) = \ln \| -1 \| + i(\theta + 2k\pi)$$

$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi)$$

$$\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

el valor principal es:  $\ln(-1) = \pi i$

**OBSERVACIÓN:** El logaritmo de un número negativo no existe en los números reales, pero sí existe en los números complejos.

**Desarrollo**

$$\ln z = 2k\pi i, \quad \ln w = \pi(1 + 2k)i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln z + \ln w = \pi(1 + 4k)i$$

... (1)

$$\ln zw = \ln z + \ln w, \quad -\pi < \theta + \varphi \leq \pi$$

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \begin{cases} \ln z - \ln w - 2\pi i, & \pi < \theta - \varphi \leq 2\pi \\ \ln z - \ln w, & -\pi < \theta - \varphi \leq \pi \\ \ln z - \ln w + 2\pi i, & -2\pi < \theta - \varphi \leq -\pi \end{cases}$$

$$\ln z^m = m \ln z = 2k\pi i, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ y } k \text{ es el único entero } \frac{m}{2\pi} \theta - \frac{1}{2} \leq k < \left(\frac{m}{2\pi} \theta\right) + \frac{1}{2}$$

#### 4.8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSA.-

Si  $z = \sin w$ , entonces  $w = \arcsen z$  se llama función inversa de la función seno de  $z$  y en forma análoga se define las demás funciones trigonométricas inversas  $\arccos z$ ,  $\arctg z$ ,  $\operatorname{arccsc} z$  y  $\operatorname{arccosec} z$ , estas funciones son multivaluadas y pueden ser representadas en función de la función logaritmo natural donde se omite la constante aditiva  $2k\pi i$ , entonces:

$$\textcircled{1} \quad \arcsen z = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \arccos z = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\textcircled{3} \quad \arctg z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad \operatorname{arccotg} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

$$\textcircled{5} \quad \operatorname{arcsen} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\textcircled{6} \quad \operatorname{arccosec} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

**Demstración**

$$\textcircled{1} \quad \text{Probaremos que: } \arcsen z = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{1-z^2}\right)$$

Sea  $w = \arcsen z$ , aplicando la función sen

$$\sen w = \sen(\arcsen z) = (\sen(\arcsen z))i/z = z$$

$$z = \sen w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) \Rightarrow 2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$\text{de donde } e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{(2iz)^2 + 4}}{2} = \frac{2iz \pm 2\sqrt{1-z^2}}{2}$$

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}, \text{ tomando logaritmo}$$

$$\ln e^{iw} = \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \Rightarrow iw \ln e = \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\text{de donde } w = \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \quad \therefore \arcsen z = \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Probaremos que: } \arctg z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Sea  $w = \arctg z \Rightarrow \operatorname{tg} w = z$ , entonces

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{\sen w}{\cos w} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})}{\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$$

$$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$$

$$\text{de donde } (1-iz)e^{2iw} - iz - 1 = 0 \Rightarrow e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\ln e^{2iw} = \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \text{ de donde: } 2iw = \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \text{ entonces } w = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$\therefore \arctg z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

#### 4.9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSA.- HIPERBÓLICAS

Sea  $z = \sinh w$ , entonces  $w = \operatorname{arcsen} h z$  se llama función hiperbólica inversa de  $z$ , esta función es multivaluada, análogamente se define las funciones  $w = \operatorname{arccosh} z$ ,  $w = \operatorname{artgh} z$ ,  $w = \operatorname{arctgh} z$ ,  $w = \operatorname{arcsch} z$ ,  $w = \operatorname{arccsch} z$ .

Estas funciones pueden ser representadas en términos de la función logaritmo natural.

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{arcsen} h z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{arccosh} h z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\textcircled{3} \quad \operatorname{artgh} h z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad \operatorname{arctgh} h z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\textcircled{5} \quad \operatorname{arcsch} h z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\textcircled{6} \quad \operatorname{arccsch} h z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)$$

**Demstración**

$$\textcircled{1} \quad \text{Probaremos que: } \operatorname{arcsen} h z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

Sea  $w = \operatorname{arcsen} h z$  entonces  $\sinh w = z$  de donde

$$z = \sinh w = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}), \text{ entonces: } 2z = e^w - e^{-w}$$

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0, \text{ de donde } e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 + 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\ln e^w = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1}) \text{ entonces } w = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\therefore \operatorname{arcsen} h z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

Expresar cada número en la forma  $a + bi$

8)

$$\frac{1+i}{1-i}$$

$$1 + \frac{\pi}{2}i$$

$$\ln(1-i)$$



Sea  $w = \operatorname{arctgh} z \Rightarrow z = \operatorname{tgh} w = \frac{\sinh w}{\cosh w}$  de donde

$$z = \operatorname{tgh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} \Rightarrow z(e^w + e^{-w}) = e^w - e^{-w}$$

$$z(e^{2w} + 1) = e^{2w} - 1 \Rightarrow (1 - z)e^{2w} = 1 - z$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z} \text{ entonces } \ln e^{2w} = \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$$

$$2w = \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \text{ entonces } w = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \quad \dots \quad \operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$$

#### 4.10. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Pruebe que:  $e^{2+3i} = e^2 e^{3i}$
2. Pruebe que:  $e^{\frac{2+\pi}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$
3. Pruebe que:  $e^{2+\pi i} = -e^2$
4. Demuestre que:  $\|e^{z^2}\| \leq e^{|z|^2}$
5. Expresar  $\|e^{2+3i} + e^{2-i}\|$  en términos de  $x$  e  $y$ . Pruebe entonces que:  $\|e^{2+3i} - e^{2-i}\| \leq e^2 + e^{(2/5)}$
6. Demostrar que  $\|e^{-2i}\| < 1$  si y solo si  $\operatorname{Re}(z) > 0$
7. Sea  $z$  cualquier número complejo no nulo. Demostrar que: si  $z = re^{i\theta}$ , entonces  $e^{i(n+\pi)\theta} = z$
8. Probar que:  $e^{iz} = e^{-iz}$  si y solo si  $z = n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- a)  $e^{-z}$       b)  $e^{-z^2}$       c)  $e^{i \operatorname{arctgh} z}$

9. Expresar cada número en la forma  $a + bi$ 
  - a)  $e^{\frac{3\pi}{2}}$       b)  $e^{\frac{5\pi}{2}}$       c)  $e^{\frac{7\pi}{2}}$
10. Encuentre todos los números complejos  $z$  que satisfacen las condiciones dadas
  - a)  $e^{2z} = 1$       b)  $e^z = z$       c)  $e^z = -1$
11. Resuelva la ecuación  $e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
12. Resuelva la ecuación  $e^{z^2} = 1$
13. Pruebe que:  $\cos(\overline{iz}) = \overline{\cos(iz)}$ ,  $\forall z$
14. Probar:  $\operatorname{sen}(iz) = \overline{\operatorname{sen}(iz)}$  si y solo si  $z = n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
15. Muestre que:  $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z}$
16. Pruebe las identidades
  - a)  $\|\operatorname{sen} z\|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$       b)  $\|\cos z\|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y$
17. Pruebe las identidades
  - a)  $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$
  - b)  $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
  - c)  $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$       d)  $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$
18. Expresar cada número en la forma  $x + iy$ 
  - a)  $\operatorname{sen} i$       b)  $\cos(-i)$       c)  $\cos(1+i)$       d)  $\operatorname{tg} 2i$

20. Encuentre todos los números complejos  $z$  que cumplan las condiciones dadas:
  - a)  $\cos z = \operatorname{sen} z$       b)  $\cos z = -i \operatorname{sen} z$
21. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:
  - a)  $\cos z = 2$       b)  $\operatorname{sen} z = 1+i$       c)  $\operatorname{sen}(\cos z) = 0$
22. Pruebe las reglas de la derivación de:
  - a)  $(\operatorname{tg} z)' = \sec^2 z$       b)  $(\operatorname{cig} z)' = -\cos \operatorname{ec}^2 z$
  - c)  $(\sec z)' = \sec z \operatorname{tg} z$       d)  $(\cos \operatorname{ec} z)' = -\operatorname{cig} z \cos \operatorname{ec} z$
23. Comprobar que:  $\operatorname{tgh}(z + \pi i) = \operatorname{tgh} z$
24. Compruebe que:
  - a)  $\operatorname{sen} h(z + \pi i) = -\operatorname{sen} h z$       b)  $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$
25. Sea  $z = x + iy$ , pruebe que:  $\|\operatorname{sen} h y\| \leq \|\operatorname{sen} z\| \leq \|\cosh y\|$
26. Demuestre que:
  - a)  $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sen} h z$       b)  $\cos(iz) = \cosh z$       c)  $\operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{tgh} z$
27. Pruebe las identidades:
  - a)  $\cosh^2 z - \operatorname{sen} h^2 z = 1$       b)  $\cosh(z-z) = \cosh z$       c)  $\operatorname{sen} h(-z) = -\operatorname{sen} h z$
28. Pruebe las identidades:
  - a)  $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} h z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{sen} h z_2$
  - b)  $\cos(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{sen} h z_1 \operatorname{sen} h z_2$
29. Demostrar que:
  - a)  $\|\operatorname{sen} h z\|^2 = \operatorname{sen} h^2 x + \operatorname{sen}^2 y$       b)  $\|\cosh z\|^2 = \operatorname{sen} h^2 x + \cosh^2 y$

30. Verificar que:
  - a)  $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen}(2x) + i \operatorname{sen} h(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$       b)  $\operatorname{cig} z = \frac{\operatorname{sen}(2x) + i \operatorname{sen} h(2y)}{\cosh(2y) - \cos(2x)}$
31. Pruebe que:  $\|\cos z\| = \sqrt{\operatorname{sen} h^2 y + \cos^2 x}$
32. Mostrar que:  $\|\operatorname{sen} z\|^2 + \|\cos z\|^2 = \operatorname{sen} h^2 y + \cosh^2 y$
33. Demostrar que:  $\|\operatorname{sen} h z\|^2 = \operatorname{sen} h^2 x + \operatorname{sen}^2 y$
34. Demostrar que:  $\|\cosh z\|^2 = \operatorname{sen} h^2 x + \cosh^2 y = \cosh^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
35. Expresar cada número en la forma  $x + iy$ 
  - a)  $\cosh(1+i)$       b)  $\operatorname{sen} h(\pi i)$       c)  $\operatorname{sen} h(1 + \pi i)$       d)  $\cosh(\frac{\pi i}{4})$
36. Encuentre todos los números complejos  $z$  que cumplen las condiciones dadas:
  - a)  $\cosh z = 2$       b)  $\cosh z = i$       c)  $\operatorname{sen} h z = i\sqrt{3}$
  - d)  $\operatorname{sen} h^2 z = i$       e)  $\operatorname{sen} h(\cos z) = 0$       f)  $\operatorname{arccosh} z = 3 + 4i$
37. Pruebe las reglas de derivación de:
  - a)  $(\operatorname{sen} h z)' = \cosh z$       b)  $(\cosh z)' = \operatorname{sen} h z$
  - c)  $(\operatorname{tgh} z)' = \operatorname{sen} h^2 z$       d)  $(\operatorname{cig} z)' = -\cos \operatorname{ec} h^2 z$
  - e)  $(\sec h z)' = -\sec h z \operatorname{tgh} z$       f)  $(\cos \operatorname{ec} h z)' = -\cos \operatorname{ec} h z \operatorname{cig} z$
38. Pruebe que:
  - a)  $(\operatorname{arcsen} h z)' = (1 - z^2)^{-1/2}$ ,  $z \neq \pm 1$       b)  $(\operatorname{arccosh} z)' = -(1 - z^2)^{-1/2}$ ,  $z \neq \pm 1$
  - c)  $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$ ,  $z \neq \pm i$

39. Pruebe que:
- a)  $(\operatorname{arcsenh} z)' = (1+z^2)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm i$       b)  $(\operatorname{arccosh} z)' = (z^2-1)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$
- c)  $(\operatorname{arctgh} z)' = \frac{1}{1-z^2}, z \neq \pm 1$
40. Pruebe que:
- a)  $\log(-i) = 1 - \frac{\pi}{2}i$       b)  $\log(-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}i$
41. Compruebe que si  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- a)  $\log e = 1 + 2\pi ni$       b)  $\log i = (2n + \frac{1}{2})\pi i$
42. Compruebe si  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $\log(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi i$
43. Pruebe que:  $\log z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
44. Evalúe  $\operatorname{tg}(\frac{1}{i} \log(\frac{1-i}{1+i}))$
45. Calcular:
- a)  $\ln i$       b)  $\ln(\frac{1+i}{\sqrt{2}})$
- c)  $\ln(2-3i)$       d)  $\ln(-2+3i)$
46. Demostrar las siguientes igualdades:
- a)  $\operatorname{arccos} z = i \ln(z + \sqrt{z^2-1})$       b)  $\operatorname{arcsen} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2-1})$
- c)  $\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln(\frac{z-i}{z+i}), z \neq \pm i$

47. Demostrar las siguientes igualdades:
- a)  $\operatorname{arcsenh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$       b)  $\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$
- c)  $\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+z}{1-z})$       d)  $\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \ln(\frac{z+1}{z-1})$
48. Pruebe que:  $\operatorname{arctgh}(e^{\frac{\theta}{2}}) = \frac{1}{2} \log(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2})$
49. Si  $z = x + iy$ , demuestre que en todas partes donde el denominador no sea nulo:
- $$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} x \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y} + i \frac{\operatorname{senh} y \cosh y}{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$$
50. Si  $z = x + iy$ , demuestre que en todas partes donde el denominador no sea nulo:
- $$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{senh} x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y} + i \frac{\operatorname{sen} y \cos y}{\operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y}$$

## CAPÍTULO V

### 5. INTEGRACIÓN COMPLEJA.-

Las integrales son muy importantes en el estudio de las funciones de una variable  $\mathbb{C}$ -compleja. La Teoría de Integración que desarrollaremos es notable por su elegancia matemática, los teoremas son en general concisos y potentes en donde sus demostraciones son muy sencillas y además por las múltiples aplicaciones en matemáticas aplicadas.

La integración compleja es una de las teorías de la matemática en la que se trabaja con tanto entusiasmo debido a su accesibilidad, existiendo por lo menos dos razones esenciales.

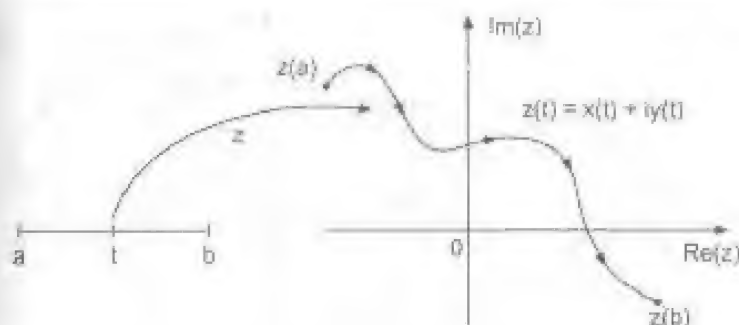
1ro. Dentro de las aplicaciones se encuentran las integrales reales que pueden evaluarse por integración compleja cuando no se tiene éxito con los métodos usuales del cálculo integral real.

2do. Algunas de las propiedades básicas de las funciones analíticas tales como la existencia de derivadas de orden superior no pueden demostrarse por otros métodos, en tales casos se utiliza la integral, este hecho marca las diferencias básicas entre el cálculo real y el complejo.

#### 5.1. CURVAS EN EL PLANO COMPLEJO.-

Una curva  $\gamma$  en el plano complejo  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , es el conjunto de puntos  $(x, y)$  tal que

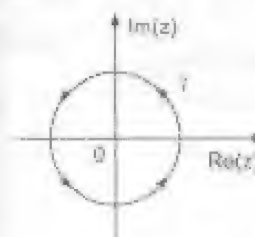
$$\gamma = \{x = x(t), y = y(t) \mid a \leq t \leq b\}$$



#### OBSERVACIONES.-

1. El punto  $z(a)$  se denomina punto inicial de la curva  $\gamma$  y el punto  $z(b)$  se denomina punto final de la curva  $\gamma$ .
2. También a  $z(a)$  y  $z(b)$  se le llaman extremos de la curva  $\gamma$ .
3. Si  $z(a) = z(b)$  se dice que la curva es cerrada.

**Ejemplo.-** La curva  $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$  es cerrada



$$\gamma = z(t) = (R \cos t, R \operatorname{sen} t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

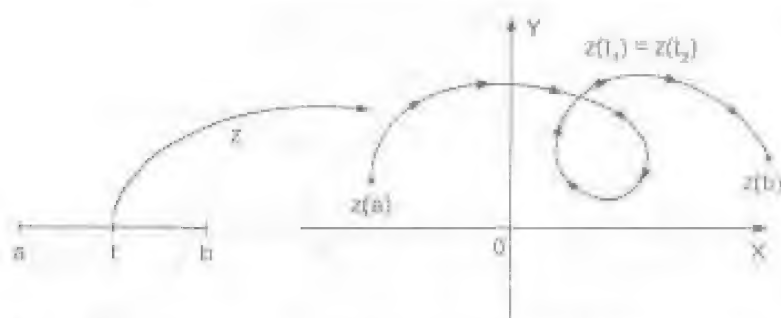
$$z(0) = z(2\pi) = (R, 0)$$

4. La dirección positiva de la curva  $\gamma$ , corresponde a los valores crecientes del parámetro  $t$ .
5. Como  $x(t), y(t)$  son continuas en  $[a, b]$  y también supondremos que



donde  $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas de la variable  $t$  en el intervalo  $[a, b]$ , como  $z = x + iy$ , entonces a la curva  $\gamma$  se puede expresar en la forma:

$$\gamma: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$



7. Curva simple es una curva que no tiene punto doble; también es llamada curva de JORDAN.

## 5.2. DEFINICIÓN.-

Consideremos una función compleja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que:

$$f(t) = \operatorname{Re}(f(t)) + i \operatorname{Im}(f(t))$$

entonces definimos a la integral en la forma:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

$$\operatorname{Re} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$$

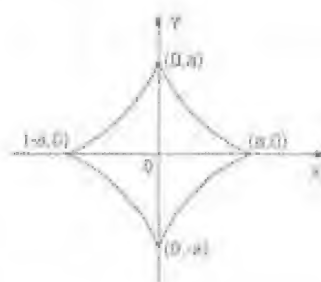
$$\operatorname{Im} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Ejemplos.-

1. Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(t) = t^4 + i(t^2 + 1)$  calcular  $\int_a^b f(t) dt$

Desarrollo

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^1 t^4 dt + i \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{1}{5} + \frac{4}{3}i \in \mathbb{C}$$



No es diferenciable, pues en los puntos  $(a,0)$ ,  $(-a,0)$ ,  $(0,a)$ ,  $(0,-a)$  no existe la derivada.

## 5.4. DEFINICIÓN.-

Sea  $\gamma = \{z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$  una curva, entonces decimos que la curva  $\gamma$  es rectificable si su longitud de arco  $L_\gamma$  existe, es decir la integral

$$L_\gamma = \int_\alpha^\beta \|z'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \text{ existe } (L_\gamma < \infty \text{ finito}).$$

Ejemplos.-

1. Hallar  $L_\gamma$  si  $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$

Desarrollo

Parametrizando la curva  $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$ , se tiene:

2. Sea  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t$  calcular  $\int_a^b f(t) dt$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt + i \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt + i \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt \\ &= \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} + i \left( -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

## 5.3. DEFINICIÓN.-

Sea  $z: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que  $\gamma = \{z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$  es una curva, se dice que la curva  $\gamma$  es diferenciable ( $\gamma$  es una curva suave o regular o que no presente picos) es decir  $\gamma$  es diferenciable si  $z'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [\alpha, \beta]$

Ejemplos.-

1. La curva  $\gamma: x^2 + y^2 = R^2$  es diferenciable, pues  $\gamma: z(t) = R \cos t + i R \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces:  $z'(t) = -R \sin t + i R \cos t$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$

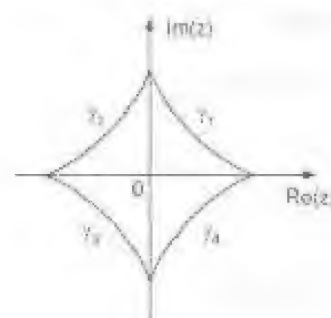
$$\text{Si } t = 0, \quad z'(0) = (0, R) \neq (0, 0)$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \quad z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}\right) \neq (0, 0)$$

$$t = 2\pi, \quad z'(2\pi) = (0, R) \neq (0, 0)$$

2. ¿ $\gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  es diferenciable?

Desarrollo



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$$L_\gamma = 4L_{\gamma_1}$$

parametrizando la curva y se tiene

$$z(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

para  $L_{\gamma_1} = 4L_{\gamma_1}$ , tomamos  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$z'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t), \text{ de donde su módulo es:}$$

$$\|z'(t)\| = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} = \frac{3a}{2} \sin 2t$$

$$L_{\gamma_1} = 4L_{\gamma_1} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2} \sin 2t dt = 3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

3. Si  $\gamma$  es la circunferencia con centro en el origen y radio 1,  $f(z) = \frac{1}{z}$  recorrido positivamente, calcular  $\oint_\gamma \frac{dz}{z}$

Desarrollo

$z(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , derivando

$z'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ , de donde su módulo es

$$\|z'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \|z'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

③ Hallar  $L_\gamma$  si  $\gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$

**Desarrollo**

Parametrizando la curva  $C: y = x^2$ , de donde

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$$

$$dz(t) = z'(t)dt = (1 + 2it)dt$$

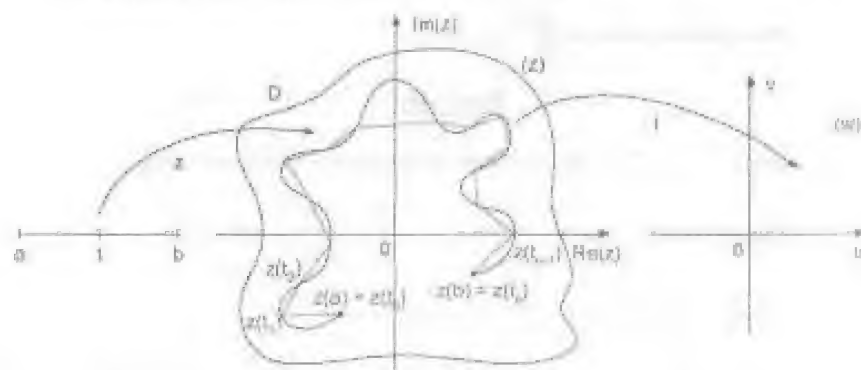
$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 z^2(t) dz(t) = \int_0^1 (t + it^2)^2 (1 + 2it) dt$$

$$= \int_0^1 [(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i] dt = \left[ \frac{t^3}{3} - t^5 \right] + \left[ \frac{4t^4}{4} - \frac{2t^6}{6} \right] i \Big|_0^1$$

$$= \left( \frac{1}{3} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{3} \right) i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i = \frac{2}{3} (-1 + i)$$

## 5.5. INTEGRALES CURVILÍNEAS EN $\mathbb{C}$

Consideremos una curva  $\gamma \subset \mathbb{C}$  y una función  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma \subset D$ , donde  $f$  es inyectiva y continua por lo menos sobre la curva  $\gamma$ .



Los segmentos de  $z_0$  a  $z_1$ ;  $z_1$  a  $z_2$ ;  $z_2$  a  $z_3$ ; ...;  $z(t_{n-1})$  a  $z(t_n)$  determinan una poligonal sobre la curva  $\gamma$ .

Ahora tomamos los números complejos sobre la curva  $\gamma$ .

Sea  $\gamma: x^2 + y^2 = 1$ , la circunferencia de centro en el origen y radio 1

Parametrizando la curva  $\gamma$ , se tiene:  $\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\gamma: z(t) = \cos t + i \sin t \Rightarrow z'(t) = -\sin t + i \cos t$$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)dt}{z(t)} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i \cos t}{\cos t + i \sin t} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{\cos t + i \sin t}{\cos t + i \sin t} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

④ Calcular  $\int_C z^2 dz$ , donde  $C$  es el arco de una parábola  $C: y = x^2$  desde  $(0,0)$  hasta  $(1,1)$ .

$\alpha_1$  entre  $z_0$  y  $z_1$

$\alpha_2$  entre  $z_1$  y  $z_2$

$\alpha_3$  entre  $z_2$  y  $z_3$

$\alpha_4$  entre  $z_3$  y  $z_4$

$\alpha_{n-1}$  entre  $z_{n-2}$  y  $z_{n-1}$

$\alpha_n$  entre  $z_{n-1}$  y  $z_n$

Luego formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta z_k, \text{ donde } f = u + iv$$

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$$

$$z_k = x_k + i y_k$$

$$\alpha_k = \alpha_k + i \beta_k$$

$$f(\alpha_k) = u(\alpha_k) + i \beta_k + iv(\alpha_k + i \beta_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta z_k \text{ se forma para cada partición del intervalo } [a, b], \text{ de esta manera}$$

obtenemos una sucesión de números complejos  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , el límite de  $S_n$  se le llama integral de línea de  $f(z)$  a lo largo de la trayectoria  $\gamma$ , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta z_k = \int_\gamma f(z) dz$$

$$f(\alpha_k) = u(\alpha_k) + i \beta_k + iv(\alpha_k + i \beta_k) = u + iv$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\alpha_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n [u(\alpha_k) + i \beta_k + iv(\alpha_k + i \beta_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n (u + iv)(\Delta x_k + i \Delta y_k) = \sum_{k=1}^n [u \Delta x_k - v \Delta y_k + i(u \Delta y_k + v \Delta x_k)]$$

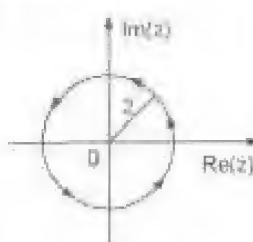
$$S_n = \sum_{k=1}^n (u \Delta x_k - v \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (u \Delta y_k + v \Delta x_k)$$

como  $f$  es inyectiva y continua por lo menos sobre la curva  $\gamma$ , entonces  $u$  y  $v$  son inyectiva y continuas, entonces:

$$\int_\gamma f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_\gamma (u dx - v dy) + i \int_\gamma (u dy + v dx)$$

Ejemplos:

① Calcular la integral  $\int_\gamma z^2 dz$  donde  $\gamma: \|z\| = 2$



**Desarrollo**

$\gamma: \|z\| = 2$ , parametrizando la curva

$$\gamma: z(\theta) = 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z'(\theta) d\theta = 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^{2\pi} z^2(\theta) z'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 4e^{2i\theta} 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$= 8i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{8}{3} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$$



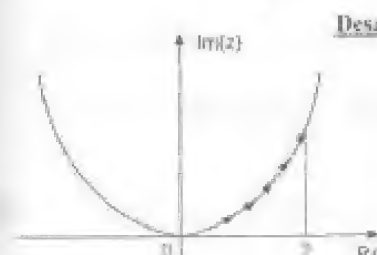
$$\text{Si } \gamma: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

O sea  $\gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ ,  $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + \\ &+ \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt \\ &= \int_a^b u(x(t), y(t))(x'(t) + iy'(t)) dt + i \int_a^b v(x(t), y(t))(x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + i(v(x(t), y(t)))](x'(t) + iy'(t)) dt = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \\ \therefore \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ Calcular la integral } \int z^2 dz, \text{ donde } \gamma: y=x^2, \text{ desde } (0,0) \text{ hasta } (2,4)$$

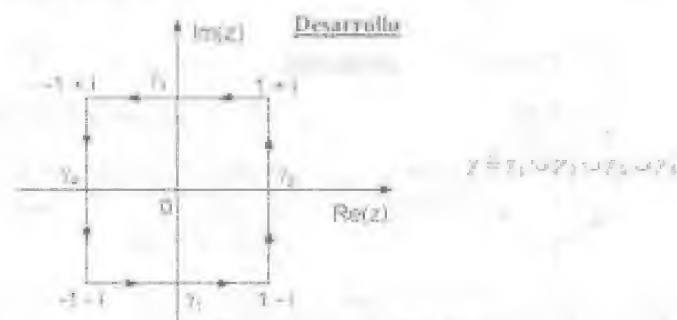
**Desarrollo**



$\gamma: y=x^2, 0 \leq x \leq 2$   
 parametrizando la curva  $\gamma: y=x^2$   
 $\gamma: z=z(t)=t+it^2, 0 \leq t \leq 2$   
 $z'(t)=1+2it$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^2 (t+it^2)^2 (1+2it) dt = \int_0^2 (t^2-t^4+2it^3)(1+2it) dt \\ &= \int_0^2 [(t^2-5t^4) + (4t^3-2t^5)i] dt = \left[ \frac{t^3}{3} - t^5 + (t^4 - \frac{t^6}{3})i \right]_0^2 \\ &= \frac{28}{3} - \frac{16}{3}i \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{ Calcular la integral } \int z^2 dz, \text{ donde } \gamma \text{ es la frontera del cuadrado de vértices } -1-i, 1-i, 1+i, -1+i$$



$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz + \int_{\gamma_3} z^2 dz + \int_{\gamma_4} z^2 dz \quad \dots (1)$$

parametrizando las líneas  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  y  $\gamma_4$  se tiene:

$$\gamma_1: z=z(t)=(1-i)(1-t)+i(1-t), 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z=(2t-1)-i(1-t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2: z=z(t)=(2t-1)-i, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} z^2 dz &= \int_0^1 (2t-1-i)^2 2 dt = 4 \int_0^1 [(2t^2-2t)+i(1-2t)] dt \\ &= 4 \left[ \frac{2t^3}{3} - t^2 + i(1-t) \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}i + i(1-1) = -\frac{4}{3} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

$$\gamma_3: z=z(t)=(1-i)(1-t)+i(1+t), 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z=(2t-1)i, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_4: z=z(t)=1+(2t-1)i, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z^2 dz &= \int_0^1 [1+(2t-1)i]^2 2i dt = 2i \int_0^1 [(2-2t)+2(2t-1)i] dt \\ &= 4i \int_0^1 [1-t+(2t-1)i] dt = 4i \left[ t - \frac{t^2}{2} + (t^2-t)i \right]_0^1 = 4i \left[ \frac{1}{2} - 0 \right] = 2i \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\gamma_4: z=z(t)=(1-i)(1-t)+i(1+t), 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_5: z=z(t)=1+(2t-1)i, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} z^2 dz &= \int_0^1 (1-2t+i)^2 (-2i) dt = -2i \int_0^1 [(1-2t)^2 + 2i(1-2t)-1] dt \\ &= -2i \left[ \frac{(1-2t)^3}{-6} - 2i(1-t^2) - t \right]_0^1 = -2i \left[ \left( \frac{1}{6} + 0 - 1 \right) - \left( -\frac{1}{6} + 0 - 0 \right) \right] = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$\gamma_4: z=z(t)=(1-i)(1-t)+i(1-t), 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_5: z=z(t)=1+(2t-1)i, 0 \leq t \leq 1$$

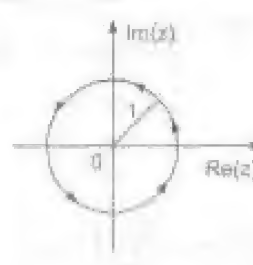
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} z^2 dz &= \int_0^1 [-1+(1-2t)i]^2 (-2i) dt = -2i \int_0^1 [1-2i(1-t)+(1-2t)^2] dt \\ &= -2i \left[ t - \frac{(1-2t)^2}{2} + \frac{(1-2t)^3}{6} \right]_0^1 = -2i \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{6} + 0 - 0 \right) \right] \\ &= -2i \left[ 1 - \frac{2}{3} - i \right] = -2i \left[ \frac{1}{3} - i \right] = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i \end{aligned} \quad \dots (5)$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (1) se tiene:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{4}{3} + 2i + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$$

$$\textcircled{4} \text{ Calcular } \int z dz, \text{ si } \gamma: x^2+y^2=1$$

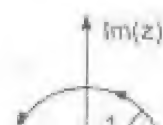
**Desarrollo**



$\gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$   
 $\gamma: z=z(t)=\cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$   
 $z'(t)=-\sin t + i \cos t$   
 $\overline{z(t)}=\cos t - i \sin t$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^{2\pi} z(t)z'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

$$\textcircled{5} \text{ Calcular } \int z dz, \text{ donde } \gamma: x^2+y^2=1$$



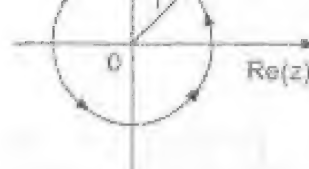
**Desarrollo**

$$\gamma: z=z(t)=\cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z'(t)=-\sin t + i \cos t$$

$$\textcircled{6} \text{ Como } F: \gamma \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ es acotada, } \exists M > 0 \text{ tal que } \|F(z)\| \leq M, \forall z \in \gamma, \text{ tal que } \left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq M L_{\gamma}, \text{ donde } L_{\gamma} \text{ es la longitud de la curva.}$$

**Demostración**



$$\int_0^{2\pi} z dz = \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)(-sen t + i cos t) dt = 0$$

## 5.6. PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES CURVILÍNEAS.

Sea  $\gamma = \{z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ , donde  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F, G: \gamma \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , funciones continuas y  $\lambda$  un escalar, entonces:

- ①  $\int_{\gamma} \lambda F(z) dz = \lambda \int_{\gamma} F(z) dz$
- ②  $\int_{\gamma} [F(z) \pm G(z)] dz = \int_{\gamma} F(z) dz \pm \int_{\gamma} G(z) dz$  (La integral de línea es una transformación lineal)
- ③  $\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq \int_{\gamma} \|F(z)\| dz$
- ④  $\int_{\gamma} F(z) dz = - \int_{\gamma^{-1}} F(z) dz$
- ⑤ Si  $\gamma$  se subdivide en  $n$  subarcos  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$  tal que  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots \cup \gamma_n$ , entonces:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{\gamma_1} F(z) dz + \int_{\gamma_2} F(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} F(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} F(z) dz$$



$$\begin{aligned} &= \left\| \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i + \left( \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n G(z_i) \Delta z_i \right) \right\| \\ &= \left\| \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i \right\| + \left\| \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n G(z_i) \Delta z_i \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{por lo tanto } \left\| \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n (F(z_i) + G(z_i)) \Delta z_i \right\| < \epsilon$$

para toda partición  $P_n$  tal que  $\|P_n\| < \delta$ , entonces:

$$\int_{\gamma} (F(z) + G(z)) dz \text{ existe y es igual a } \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz$$

$$\text{es decir: } \int_{\gamma} (F(z) + G(z)) dz = \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz$$

- ③ Por demostrar que:  $\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq \int_{\gamma} \|F(z)\| dz$

aplicando la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^n \|F(z_i) \Delta z_i\| = \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| \quad (1) \end{aligned}$$

como  $\|F(z)\|$  es continua en  $z$  tomando límite cuando  $\|P_n\| \rightarrow 0$  ambos lados de (1)

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \left\| \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i \right\| \leq \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| \text{ se concluye que:}$$

$$\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq \int_{\gamma} \|F(z)\| dz$$

- ① Por demostrar:  $\int_{\gamma} \lambda F(z) dz = \lambda \int_{\gamma} F(z) dz$ , donde la integral  $\int_{\gamma} F(z) dz$  existe, entonces  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , para toda partición  $P_n$ , con  $\|P_n\| < \delta$  tal que  $\left\| \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i \right\| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ , es decir que para todas esas particiones se tiene:

$$\left\| \lambda \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{i=1}^n \lambda F(z_i) \Delta z_i \right\| < \epsilon, \text{ es decir que } \int_{\gamma} \lambda F(z) dz \text{ existe y es igual a}$$

$$\lambda \int_{\gamma} F(z) dz, \text{ es decir: } \int_{\gamma} \lambda F(z) dz = \lambda \int_{\gamma} F(z) dz$$

- ② Por demostrar  $\int_{\gamma} (F(z) + G(z)) dz = \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz$

Supongamos que  $\int_{\gamma} F(z) dz$  y  $\int_{\gamma} G(z) dz$  existen, entonces  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  para

$$\text{toda partición } P_n \text{ con } \|P_n\| < \delta \text{ tal que: } \left\| \int_{\gamma} F(z) dz - \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\left\| \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n G(z_i) \Delta z_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ ahora consideremos}$$

$$\left\| \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n (F(z_i) + G(z_i)) \Delta z_i \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\gamma} F(z) dz + \int_{\gamma} G(z) dz - \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i - \sum_{i=1}^n G(z_i) \Delta z_i \right\|$$

- ④ Por demostrar que:  $\int_{\gamma} F(z) dz = - \int_{\gamma^{-1}} F(z) dz$

Sea  $P_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$  y  $Q_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una ampliación de la partición de  $P_n$  donde  $s_{n+1} = -t_1$  y  $P_n = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  una partición de  $[-b, a]$  donde  $Q_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una ampliación de  $P_n$  donde  $s_{n+1} = -t_1$ .

Si  $\gamma$  es el contorno  $z = z(t), a \leq t \leq b$ , entonces  $-\gamma$  es el contorno  $z = z(s) = z(-s), -b \leq s \leq a$

Puesto que  $\int_{\gamma} F(z) dz$  y  $-\int_{\gamma} F(z) dz$  existen:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(t_i)) [z(t_i) - z(t_{i-1})]$$

$$\int_{-\gamma} F(z) dz = \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(s_i)) [z(s_i) - z(s_{i-1})]$$

para toda partición  $P_n$  y  $Q_n$  respectivamente. En forma equivalente es decir:

$$\int_{-\gamma} F(z) dz = \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(s_i)) [z(s_i) - z(s_{i-1})]$$

como  $t_1 = -s_{n+1}, t_i = -s_{n-i+1}$  y  $z(t) = z(-s)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F(z(t_i)) [z(t_i) - z(t_{i-1})] &= \sum_{i=1}^n F(z(-s_{n-i+1})) [z(-s_{n-i+1}) - z(-s_{n-i+2})] \\ &= - \sum_{i=1}^n F(z(s_{n-i+1})) [z(s_{n-i+1}) - z(s_{n-i+2})] \end{aligned}$$

como  $\|P_n\|$  y  $\|Q_n\|$  tienden a cero simultáneamente, entonces tomando límites a ambos lados cuando  $\|P_n\| \rightarrow 0$

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(t_i)) [z(t_i) - z(t_{i-1})] = \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(s_{n-i+1})) [z(s_{n-i+1}) - z(s_{n-i+2})]$$

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(t_i)) [z(t_i) - z(t_{i-1})] = \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(s_{n-i+1})) [z(s_{n-i+1}) - z(s_{n-i+2})] + \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z(s_i)) [z(s_i) - z(s_{i-1})]$$



de donde se concluye que:  $\int_{\gamma} F(z) dz = - \int_{\gamma} F(z) dz$

- ⑤ Demostrar para el caso  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , es decir, por demostrar que

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F(z) dz = \int_{\gamma_1} F(z) dz + \int_{\gamma_2} F(z) dz$$

Sea  $P_n = [t_0, t_1, \dots, t_n]$  y  $P'_n = [t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+m}]$  partición de  $[a, b]$  y  $[b, c]$  respectivamente donde  $\gamma_1$  es la curva  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , y  $\gamma_2$  es la curva  $z = z(t)$ ,  $b \leq t \leq c$  y  $Q_n = [t_1, t_2, \dots, t_n]$  y  $Q'_n = [t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+m}]$  ampliaciones de las particiones de  $P_n$  y  $P'_n$ .

Como  $\int_{\gamma_1} F(z) dz$ ,  $\int_{\gamma_2} F(z) dz$  existen, entonces

$$\int_{\gamma_1} F(z) dz = \lim_{\|Q_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z_i) (z_i - z_{i-1})$$

$$\int_{\gamma_2} F(z) dz = \lim_{\|Q'_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=n+1}^{n+m} F(z_i) (z_i - z_{i-1}), \text{ para todo } P_n \text{ y } P'_n$$

de igual manera como  $\int_{\gamma} F(z) dz$  existe,  $\forall$  partición  $P_{n+m}$  de  $[a, b]$  entonces

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \lim_{\|P_{n+m}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+m} F(z_i) (z_i - z_{i-1})$$

esta ecuación es válida si  $P_{n+m} = P_n \cup P'_n$ , entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+m} F(z_i) (z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(z_i) (z_i - z_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^{n+m} F(z_i) (z_i - z_{i-1})$$

tomando límite cuando  $\|P_{n+m}\| \rightarrow 0$  se tiene

de donde se concluye que:  $\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{\gamma_1} F(z) dz + \int_{\gamma_2} F(z) dz$

- ⑥ Por demostrar:  $\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq M L$  donde  $\|F(z)\| \leq M$

Si  $\|F(z)\| \leq M$ ,  $\forall z \in \gamma$ , entonces por la propiedad (3) se tiene que para toda partición  $P_n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| &\leq \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \sqrt{\left(\frac{dx(t_i)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t_i)}{dt}\right)^2} dt \\ &\leq M \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{dx(t_i)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t_i)}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

tomando límite a ambos lados cuando  $\|P_n\| \rightarrow 0$

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|F(z_i)\| \|\Delta z_i\| \leq M \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{dx(t_i)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t_i)}{dt}\right)^2} dt$$

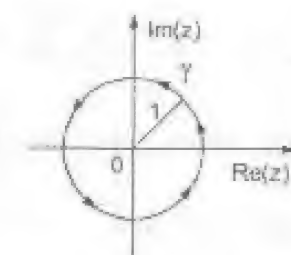
de donde  $\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq M L$

$\left\| \int_{\gamma} F(z) dz \right\| \leq M L$  por la propiedad (3)

Ejemplos:-

- ① Calcular  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$

Desarrollo



$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$z(\theta) = e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = ie^{i\theta}$$

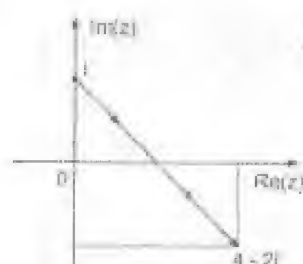
$$z^k(\theta) = e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta$$

$$\text{de donde } \operatorname{Re}(z^5(\theta)) = \cos 5\theta$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5) dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(e^{i5\theta}) z'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 5\theta \cdot ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cos 5\theta d\theta = ie^{i\theta} \left[ \frac{\sin 6\theta}{6} - \frac{5 \cos 6\theta}{36} \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= ie^{i2\pi} \left( -\frac{6}{36} \right) - i \left( -\frac{6}{36} \right) = -\frac{6i}{36} [\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1] = -\frac{6i}{36} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5) dz = 0$$

- ② Calcular  $\int_{\gamma} \|z\|^2 dz$ , donde  $\gamma$  es el segmento que une  $z=i$ ,  $w=4+2i$



Desarrollo

$$\gamma = \{(1-3t)i + 4t : 0 \leq t \leq 1\}$$

$$= \{(1-3t)i + 4(1-3t)i : 0 \leq t \leq 1\}$$

$$d(t) = 4i + (1-3t)i, 0 \leq t \leq 1$$

$$\|z(t)\|^2 = 16t^2 + (1-3t)^2$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \|z\|^2 dz &= \int_0^1 \|z(t)\|^2 z'(t) dt = \int_0^1 [16t^2 + (1-3t)^2] (4-3t)i dt \\ &= (4-3t) \int_0^1 (25t^2 - 6t + 1) dt = (4-3t) \left( \frac{25t^3}{3} - 3t^2 + t \right) \Big|_0^1 \\ &= (4-3t) \left( \frac{25}{3} - 3 + 1 \right) = \frac{10}{3} (4-3i) \end{aligned}$$

- ③ Calcular  $\int_{\gamma} z^2 dz + z^3 dz$ , a lo largo de la curva  $\gamma: z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\bar{z}$  desde  $z=i$  a  $z=2+2i$

Desarrollo

Identificando la curva:  $\gamma: z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\bar{z}$

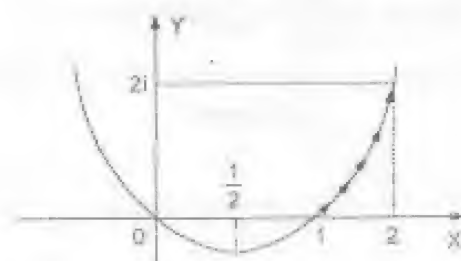
$$\gamma: (z+\bar{z})^2 = 2(z+\bar{z}) - 2i(z-\bar{z}) \quad \dots (1)$$

$$\text{pero se conoce: } z+\bar{z} = 2x, \quad z-\bar{z} = 2iy \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos en (2) en (1), es decir:

$$\gamma: (2x)^2 = 2(2x) - 2(2iy), \text{ de donde}$$

$$\gamma: y = x^2 - x, \text{ es decir: } \gamma: y = \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ es una parábola}$$



$$\gamma: y = x^2 - x, 1 \leq x \leq 2$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx + i dy \\ d\bar{z} = dx - i dy \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz + z^3 dz &= \int_{\gamma} (x^2 - y^2 - 2xy)(dx + i dy) + \int_{\gamma} (x^3 - y^3 + 2xy)(dx - i dy) \\ &= \int_{\gamma} 2(x^3 - y^3) dx + 4xy dy = \int_1^2 [2(x^3 - (x^2 - x)^3) + 4x(x^2 - x)(2x - 1)] dx \\ &= \int_1^2 (6x^4 - 8x^3 + 4x^2) dx = \frac{248}{15} \end{aligned}$$

- 4) Calcular  $\int_C \bar{z} dz$ , si  $\gamma$  es la curva del gráfico



#### Desarrollo

Se observa que:  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Parametrizando cada una de estas sub-líneas

$\gamma_1 = \{(1-t)(-3) + t(-2) / 0 \leq t \leq 1\}$ , simplificando

$\gamma_2 = \{-3 + t / 0 \leq t \leq 1\}$ , de donde se tiene:  $z(t) = -3 + t$ , entonces  $z'(t) = 1$

$z(t) = -3 + t \Rightarrow \bar{z}(t) = -3 + t = -3 + t$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (-3+t) dt = \left[ -3t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{5}{2} \quad \dots (1)$$

$\gamma_2 = \{2e^{i\theta} / 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , de donde:  $z(\theta) = 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta} \Rightarrow \bar{z}(\theta) = 2e^{-i\theta}$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_0^\pi 2e^{-i\theta} \cdot 2ie^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi 4i d\theta = 4\pi i \quad \dots (2)$$

$\gamma_3 = \{(1-t)(2) + 3t / 0 \leq t \leq 1\} = \{2+t / 0 \leq t \leq 1\}$ , de donde

$z(t) = 2+t \Rightarrow z'(t) = 1$ ,  $\bar{z}(t) = 2+t$

$$\int_{\gamma_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (2+t) dt = \left[ 2t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2} \quad \dots (3)$$

$\gamma_4 = \{3e^{i\theta} / 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , de donde:  $z(\theta) = 3e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z}(\theta) = 3e^{-i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 3ie^{i\theta}$

$$\int_{\gamma_4} \bar{z} dz = \int_0^\pi 3e^{-i\theta} \cdot 3ie^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi 9i d\theta = 9\pi i \quad \dots (4)$$

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} \bar{z} dz = \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz + \int_{\gamma_3} \bar{z} dz + \int_{\gamma_4} \bar{z} dz \quad \dots (5)$$

reemplazando (1), (2), (3), (4) en (5) se tiene:  $\int_{\gamma} \bar{z} dz = -\frac{5}{2} + 4\pi i + \frac{5}{2} + 9\pi i = 13\pi i$

### 5.7. TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.

Sea  $R$  una región simplemente conexa con frontera  $C$  suave a trozos, orientada en sentido contrario al de las agujas de un reloj; si  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  son continuas en una región abierta que contiene a  $R$  entonces:

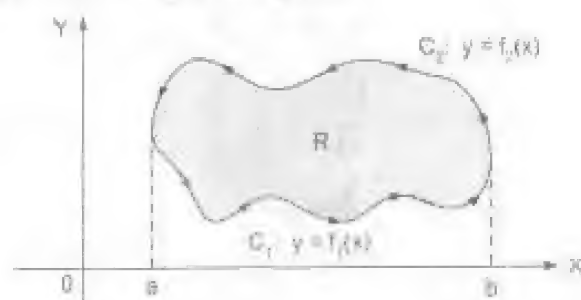
$$\int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

#### Demostración

Daremos una demostración solamente para una región que es a la vez verticalmente simple y horizontalmente simple, luego la región  $R$  se describe en dos formas:

$$R = \{(x,y) / a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

$$R = \{(x,y) / c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$



Del gráfico se observa que:  $C = C_1 \cup C_2$

La integral de línea  $\int_C P(x,y) dx$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \int_C P(x,y) dx &= \int_{C_1} P(x,y) dx + \int_{C_2} P(x,y) dx \\ &= \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx \end{aligned} \quad \dots (1)$$

por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} dx dy &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} dy dx = \int_a^b P(x,y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx = - \int_a^b [P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))] dx \end{aligned} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\int_C P(x,y) dx = - \iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} dx dy \quad \dots (3)$$

En forma similar para el caso donde  $R$  es simplemente horizontal:



Del gráfico se observa que:  $C = C_1 \cup C_2$

$$\begin{aligned} \int_C Q(x,y) dy &= \int_{C_1} Q(x,y) dy + \int_{C_2} Q(x,y) dy = \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} Q(g_1(y), y) dy + \int_{c_2(y)}^{c_1(y)} Q(g_2(y), y) dy \\ &= \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy \end{aligned} \quad \dots (4)$$

por otra parte se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} dx dy &= \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} dx dy \\ &= \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} Q(x,y) \Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy = \int_{c_1(y)}^{c_2(y)} [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy \end{aligned} \quad \dots (5)$$

$$\text{ahora reemplazando (4) en (3) se tiene: } \int_C Q(x,y) dy = \iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} dx dy \quad \dots (6)$$

al sumar (3) y (6) se obtiene:

$$\int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy$$

**NOTA.** El teorema de Green es válido para regiones más complicadas como circulares, triangulares, etc.

**Ejemplo.** Calcular la integral curvilínea

$$\int_C (3x - y^3) \sqrt{1+x^2+4y^2} dx + (8x^2 + 3y^3) \sqrt{1+x^2+4y^2} dy, \text{ donde } \gamma: x^2 + y^2 = 1$$



$$P(x, y) = \frac{3x - y^2 \sqrt{1+x^2+4y^2}}{3\sqrt{1+x^2+4y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+4y^2}} - \frac{y^2}{3}$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{-6xy^2}{(1+x^2+4y^2)^{3/2}}$$

$$Q(x, y) = \frac{(8y^4 + x^2 \sqrt{1+x^2+4y^2})}{3\sqrt{1+x^2+4y^2}} = \frac{6y^3}{\sqrt{1+x^2+4y^2}} + \frac{x^2}{3}$$

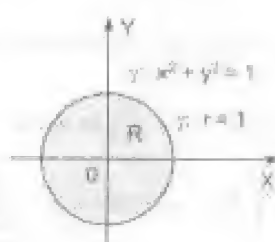
$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{-6xy^3}{(1+x^2+4y^2)^{3/2}} + x^2$$

$$\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

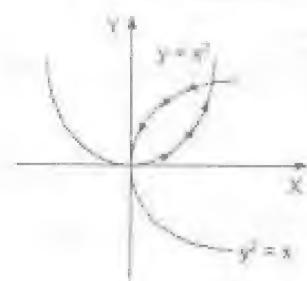
$$= \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^2 \cdot r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4} = \frac{\pi}{2}$$



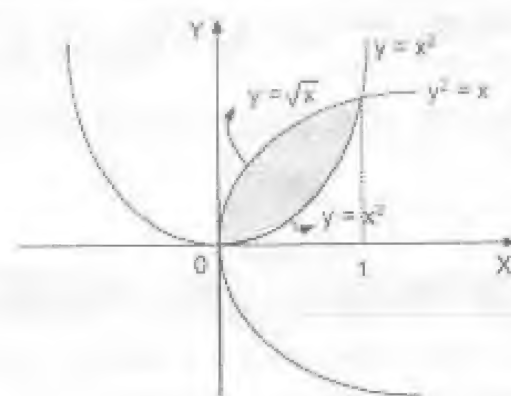
**Ejemplo.** Calcular la integral curvilínea  $\oint_C (e^x + x^2 y) dx + 3x^2 y dy$ , donde  $\gamma$  es la curva cerrada determinada por  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ .



**Desarrollo**

$$\text{Sea } \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Ahora graficamos la región R



Como  $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$ , de donde

$$\begin{cases} P(x, y) = e^x - x^2 y \\ Q(x, y) = 3x^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -x^2 \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 6xy \end{cases}$$

$$\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (6xy + x^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} (6xy + x^2) dy \right) dx = \int_0^1 (3xy^2 + x^2 y) \Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 + x^2 \sqrt{x} - 3x^5 - x^4) dx = \left( \frac{3x^4}{4} + \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \left( 1 + \frac{2}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \right) - 0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{35} = \frac{35+6}{70} = \frac{41}{70}$$

**OBSERVACIÓN.**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}; \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}, \text{ donde } B(z, \bar{z}) = P(x, y) + i Q(x, y)$$

$$\begin{aligned} \nabla B &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) = \frac{\partial}{\partial x} (P + iQ) + i \frac{\partial}{\partial y} (P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

## 5.8. TEOREMA DE GREEN EN LA FORMA COMPLEJA.

Sea  $F(z)$  una función compleja continua y sus derivadas parciales continuas en una región  $R$  y sobre su frontera  $\gamma$  donde  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ .

Probar que el teorema de Green se puede escribir en la forma compleja como:

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2i \iint_R \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} dx dy$$

**Demstración**

Sea  $F(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$ ,  $dz = dx + i dy$

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \oint_{\gamma} [P(x, y) + i Q(x, y)] (dx + i dy)$$

## 5.9. TEOREMA DE CAUCHY PARA INTEGRALES DE LINEA EN EL PLANO COMPLEJO.

Sea  $f(z)$  una función analítica en  $\Omega$ ,  $\Omega$  simplemente conexa y suave a trozos, entonces

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Demstración**

Se conoce que  $\oint_{\gamma} F(z) dz = \int (u dx - v dy) + i \int (u dy + v dx)$ , donde

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \text{ o } f' = u + iv$$

como  $f(z)$  es continua en  $\Omega \Rightarrow \exists f'(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$  y  $f'(z)$  es continua en  $\Omega$ , es decir que existen  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  y son continuas en  $\Omega$ , entonces podemos aplicar el

teorema de Green a las integrales  $\int (u dx - v dy)$  y  $\int (u dy + v dx)$ , es decir:

$$\int (u dx - v dy) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} (-v) - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \left( v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\gamma} (P(x, y) dx - Q(x, y) dy) + i \oint_{\gamma} (Q(x, y) dx + P(x, y) dy) \\
&= - \iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\
&= i \iint_D \left( \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) \right) dx dy \\
&= 2i \iint_D \frac{\partial F(z)}{\partial z} dx dy
\end{aligned}$$

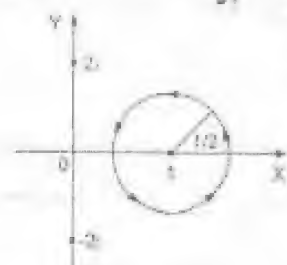
**NOTA.-** Este último resultado se obtiene de la observación

$$\begin{aligned}
&\iint_D (u dx + v dy) = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dx dy \\
&\text{ahora usando (1) y (2) se obtiene:} \\
&\iint_D f(z) dz = \iint_D (u dx + v dy) + i \iint_D (v dx - u dy) \\
&= - \iint_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\
&\text{como } f(z) \text{ es analítica en } D, \text{ entonces se cumple las ecuaciones de Cauchy - Riemann} \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= - \iint_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 + i \cdot 0 = 0 \\
&= \int_{\gamma} f(z) dz = 0
\end{aligned}$$

**Ejemplo.-** Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2 + 4)} dz$  donde  $\gamma: \|z + 1\| = \frac{1}{2}$

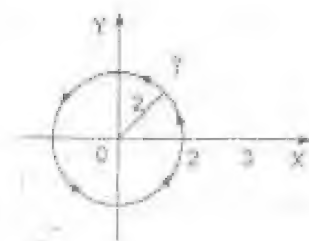


**Desarrollo**

$f(z) = \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2 + 4)}$  es analítica dentro y sobre  $\gamma$ , puesto que  $z = 0, -2i, 2i$  están fuera de  $\gamma$ , entonces por el teorema de Cauchy, se tiene:

$$\int_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2 + 4)} dz = 0$$

**Ejemplo.-** Calcular  $\int_{\gamma} \frac{e^{-2 \cos^2 t} \sin^2 t}{(z-3)^5} dz$ , si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 2\}$



**Desarrollo**

$f(z) = \frac{e^{-2 \cos^2 t} \sin^2 t}{(z-3)^5}$  es analítica dentro y sobre de  $\gamma$ , entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-2 \cos^2 t} \sin^2 t}{(z-3)^5} dz = 0$$

**Ejemplo.-** Calcular  $\int_{\gamma} z^4 dz$  donde  $\gamma: x^2 + y^2 = a^2$

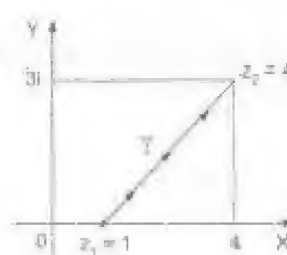
**Desarrollo**



$f(z) = z^4$  es analítica  $\forall z \in \mathbb{C}$  y además  $\gamma$  es una curva cerrada entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} z^4 dz = 0$$

**Ejemplo.-** Calcular  $\int_{\gamma} z dz$ , donde  $\gamma$  es la curva que une los puntos  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 4 + 3i$



**Desarrollo**

$f(z) = z$  es analítica en  $\mathbb{C}$  pero  $\gamma$  no es cerrada

$$\Rightarrow \int_{\gamma} z dz \neq 0$$

parametrizando y se tiene:

$$\gamma = \{(1-t) + i(4+3i) / 0 \leq t \leq 1\} = \{1 + 3i + 3it / 0 \leq t \leq 1\}$$

$$z(0) = 1 + 3i + 3i(0) \Rightarrow z'(t) = 3 + 3i$$

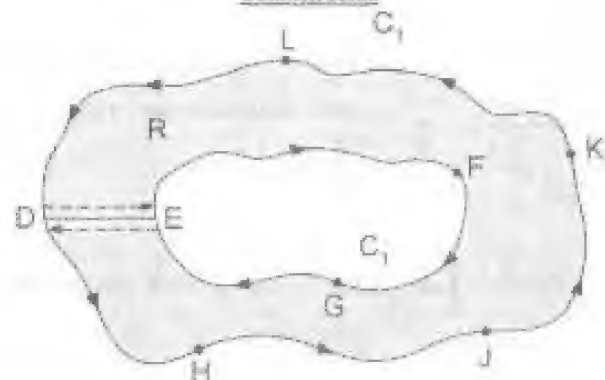
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} z dz &= \int_0^1 (1 + 3i + 3it)(3 + 3i) dt = 3(1+i) \int_0^1 (1 + 3t + 3it) dt = 3(1+i) \left[ t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3it}{2} \right] \Big|_0^1 \\
&= 3(1+i) \left[ 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \right] = 3(1+i) \left[ \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i \right] = \frac{3}{2} [5i - 3] = -\frac{3}{2} [3 - 5i]
\end{aligned}$$

### 5.10. TEOREMA.-

Sea  $f(z)$  analítica en una región  $R$  limitada por dos curvas simples cerradas  $C_1$  y  $C_2$  (sombradas en la figura) y también sobre  $C_1$  y  $C_2$ .

Probar que:  $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  recorren en sentido relativo a sus interiores.

**Demstración**



Construimos el corte transversal DE y como  $f(z)$  es analítica en la región  $R$  entonces por el teorema de Cauchy:  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

**TEOREMA.-** Sea  $F(z)$  una función analítica en el de una región  $R$  y de  $\gamma$  una curva simple. Si  $z_0$  es un punto interior a  $\gamma$ , entonces:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0}$$

**Demstración**

La función  $\frac{F(z)}{z - z_0}$  es analítica dentro y sobre la curva  $\gamma$ , excepto en el punto  $z = z_0$





$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{como } \int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0, \text{ de donde}$$

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_{\gamma_4} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

$$\text{lo que es lo mismo expresar como: } \oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_3} f(z) dz$$

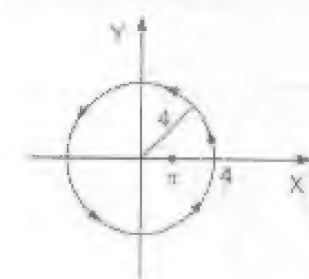
### 5.11. LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.-

La fórmula de la integral de Cauchy indica si  $f$  es una función analítica en el interior  $S$  sobre los puntos de una curva cerrada simple  $\gamma$ , los valores interiores de  $\gamma$  están completamente determinados por los valores de  $f$  sobre  $\gamma$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} F(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} F(z_0) d\theta = 2\pi i F(z_0) \text{ de donde } F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz$$

**Ejemplo.-** Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z - \pi} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 4\}$



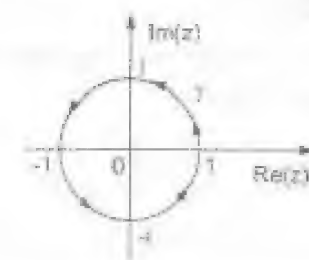
**Desarrollo**

$F(z) = e^{z^2}$  es analítica en  $\mathbb{C}$

$$F(z_0) = F(\pi) = e^{\pi^2}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z - \pi} dz = 2\pi i F(\pi) = 2\pi e^{\pi^2} i$$

**Ejemplo.-** Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z}$ , donde  $\gamma: |z| = 1$



**Desarrollo**

A la integral dada expresamos:

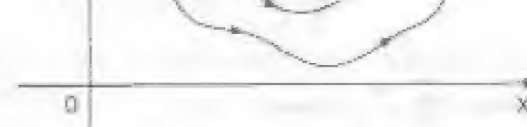
$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z+8)}, \text{ donde}$$

$f(z) = \frac{1}{z+8}$  es analítica en el interior del círculo

$\gamma: |z| = 1$  y  $z_0 = 0$  está en el interior a  $\gamma$

Luego la fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z+8)} = 2\pi i f(0) = 2\pi i \left( \frac{1}{0+8} \right) = \frac{\pi i}{4}$$



$$\text{Del teorema (5.10) se tiene: } \oint_{\gamma} \frac{F(z) dz}{z - z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \quad \dots (1)$$

como  $\Gamma$  se puede elegir como un círculo de radio  $\epsilon$  con centro  $z_0$ ; luego una ecuación para  $\Gamma$  es  $\Gamma: |z - z_0| = \epsilon$  o  $z - z_0 = \epsilon e^{i\theta}$ , donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$z = z_0 + \epsilon e^{i\theta} \text{ entonces } dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{F(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) \epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} F(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} F(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

tomando límite a ambos lados cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

**Ejemplo.-** Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ , donde  $\gamma: |z| = 3$



**Desarrollo**

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

a la integral dada expresamos en la forma:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz &= \oint_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz - \oint_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz \\ &= 2\pi i f(2) - 2\pi i f(1) = 2\pi i (0 + 1) - 2\pi i (0 - 1) = 4\pi i \end{aligned}$$

puesto que  $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$  es analítica en el interior sobre la curva  $\gamma: |z| = 3$

### 5.12. FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY PARA DERIVADAS PARCIALES.-

Si  $F(z)$  es analítica dentro y sobre la frontera  $\gamma$  de una región  $R$  simplemente conexa, entonces:

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z - z_0} dz$$

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$F''(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1.2 F(z) dz}{(z - z_0)^3}$$

$$F'''(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1.2.3 F(z) dz}{(z - z_0)^4}$$

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1.2.3 \dots n F(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) \text{ donde } f(z) = \cosh z$$

$$= \pi i (1) = \pi i \quad f'(z) = \sinh z$$

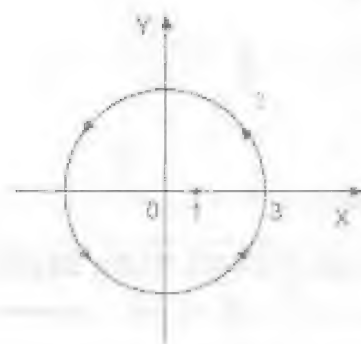
$$f''(z) = \cosh z$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^3} dz = \pi i \quad f'''(0) = 1$$

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{n! F(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{de donde } \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

**Ejemplo.-** Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^{iz} - z^4 - 2z + 1}{(z+1)^6} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$



Sea  $f(z) = z^{10} + z^4 - 4z + 1$ ,  $z_0 = 1$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^{10} + z^4 - 4z + 1}{(z-1)^5} dz = 2\pi i f^{(4)}(1)$$

$$f'(z) = 10z^9 - 4z = -4$$

$$f''(z) = 90z^8 + 12z^3$$

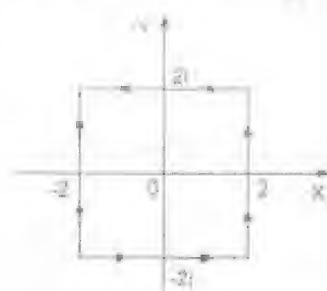
$$f'''(z) = 720z^7 + 24z^2$$

$$f^{(4)}(z) = 5(4!)z^6 + 24$$

$$f^{(4)}(1) = 30240z^6 \Rightarrow f^{(4)}(1) = 30240$$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^{10} + z^4 - 4z + 1}{(z-1)^5} dz = 2\pi i(30240) = 60480\pi i$$

Ejemplo.- Probar que:  $\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^2} dz = \pi i$ , si  $\gamma$  es el cuadrado en  $\pm 2, \pm i$



## Desarrollo

Como  $f(z) = \cosh z$  es analítica en el interior y sobre el cuadrado

Aplicando la fórmula de la Integral de Cauchy para derivadas parciales superiores

Ejemplo.- Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{z^5 - 3z^3 + 1}{(2z+1)(z^2+4)} dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 1$



## Desarrollo

A la integral dada expresamos así:

$$\oint_{\gamma} \frac{z^5 - 3z^3 + 1}{(2z+1)(z^2+4)} dz = \oint_{\gamma} \frac{z^5 - 3z^3 + 1}{2z+1} dz$$

donde  $f(z) = \frac{z^5 - 3z^3 + 1}{z^2 + 4}$  es analítica dentro y sobre de la curva  $\gamma: \|z\| = 1$ ,  $z_0 = -\frac{1}{2}$  está en el interior de la curva y entonces por la fórmula de la integral de Cauchy, se tiene:

$$\oint_{\gamma} \frac{z^5 - 3z^3 + 1}{(2z+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i f'(-\frac{1}{2}) = 2\pi i (-\frac{32}{8} - \frac{1}{4}) = 2\pi i (-\frac{43}{272}) = -\frac{43\pi i}{136}$$

Ejemplo.- Si  $n$  es un entero positivo, Probar que:  $\int_0^{2\pi} e^{i n \theta} \cos(n\theta) - \sin(n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!}$

## Desarrollo

Usando la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas superiores

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (11)$$

donde  $f(z) = e^z$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\gamma: \|z\| = 1$

como  $z_0 = 0$  está en el interior de  $\gamma$

$$f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \text{ reemplazando en (1)}$$

$$1 = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^{n+1}} \text{ de donde } I = \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}$$

$$\text{Sea } \gamma = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\text{Como } z \in \gamma \Rightarrow z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$z^{n+1} = (e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$$

$$I = \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta}{e^{i(n+1)\theta}} = i \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta}{e^{i(n+1)\theta}}$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta}{e^{in\theta}} = i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} e^{i\theta(1-n)} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} [\cos(\theta(1-n)) + i\sin(\theta(1-n))] d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} [\cos(\theta(1-n)) + i\sin(\theta(1-n))] d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \cos(\theta(1-n)) d\theta + \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \sin(\theta(1-n)) d\theta = \frac{2\pi i}{n!}$$

igualando partes imaginarias se tiene:

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \cos(\theta(1-n)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

### 5.13. TEOREMA DE ACOTACIÓN DE CAUCHY (DESIGUALDAD DE CAUCHY).

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $r$ , entonces  $\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}$ ,  $\forall n \geq 0$ , donde  $M$  es una constante tal que  $\|f(z)\| \leq M$ ,  $\forall z$  dentro de  $\gamma$

## Demostración

De la fórmula de la integral de Cauchy para derivadas superiores:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

parametrizando la circunferencia de centro  $z_0$  y de radio  $r$ :

$$\gamma: z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\|f(z)\|}{\|z-z_0\|^{n+1}} \|dz\|$$

$$\leq \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{\gamma} \|dz\| = \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! M}{r^n}$$

$$\therefore \|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n! M}{r^n} \quad \forall n \geq 0$$

### 5.14. TEOREMA DE L'HÔPITAL

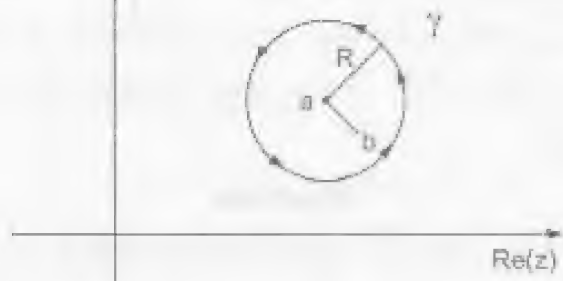
Sea  $f(z)$  una función analítica en  $C$  y  $f(z)$  es acotada, esto es  $\|f(z)\| \leq M$ ,  $\forall z \in C$ , entonces  $f(z)$  es constante.

## Demostración

Sean  $a$  y  $b \in C$  arbitrarios y consideremos la circunferencia concéntrica de  $a$  y de radio  $R$  tal que  $\|a-b\| < \frac{R}{2}$

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \frac{2\|a-b\| M}{R}, \quad \forall R > 0, \text{ hacemos } R \rightarrow +\infty$$





De la fórmula integral de Cauchy

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-a} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-b} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)(a-b)}{(z-a)(z-b)} dz$$

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\|f(z)\| \|a-b\|}{\|z-a\| \|z-b\|} \|dz\|$$

$$\leq \frac{M \|a-b\|}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\|dz\|}{\|z-a\| \|z-b\|} \quad \dots (1)$$

por otro lado se tiene:  $\|z-a\| = R$  y

$$\|z-b\| = \|(z-a) + (a-b)\| \geq \|z-a\| - \|a-b\| \geq R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

$$\text{como } \|z-b\| \geq \frac{R}{2} \text{ entonces } \|(z-a)\| \|z-b\| \geq \frac{R^2}{2}$$

$$\text{de donde se tiene: } \frac{1}{\|z-a\| \|z-b\|} \leq \frac{2}{R^2} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) y se obtiene:

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \frac{M \|a-b\|}{2\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \oint_{\gamma} \|dz\| = \frac{M \|a-b\|}{\pi R^2} \oint_{\gamma} \|dz\| = \frac{M \|a-b\|}{\pi R^2} 2\pi R$$

$$\text{entonces } \|f(a) - f(b)\| = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$$

### 5.15. TEOREMA DE MORERA.- (RECÍPROCO DEL TEOREMA DE CAUCHY)

Si  $f(z)$  es una función continua en una región  $R$  simplemente conexa y si  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ , alrededor de cada curva simple cerrada  $\gamma$  en  $R$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $R$ .

#### Demostración

Como  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ ,  $\forall$  toda curva cerrada  $\gamma$  contenida en  $R$ , entonces la integral de  $f$  de  $z_0$  a  $z$  a lo largo de cualquier contorno  $\Gamma$  es independiente de  $\Gamma$  con tal que  $z_0$ ,  $z$  y  $\Gamma$  estén en  $R$ , es decir:  $\int_{z_0}^z f(t) dt$  está definida y si  $z_0$  es fijo entonces  $F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt$

Sea  $V_{\delta_1}(z)$  una vecindad de  $z$  tal que  $V_{\delta_1}(z) \subset R$  y  $z_1 \in V_{\delta_1}(z)$  entonces:

$$\begin{aligned} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) &= \frac{1}{z_1 - z} \left[ \int_{z_0}^{z_1} f(t) dt - \int_{z_0}^z f(t) dt \right] - f(z) \\ &= \frac{1}{z_1 - z} \left[ \int_z^{z_1} f(t) dt \right] - f(z) = \frac{1}{z_1 - z} \int_z^{z_1} (f(t) - f(z)) dt \end{aligned}$$

como  $z, z_1 \in R$ , la última integral es independiente del contorno que une  $z$  a  $z_1$ , contenida en  $R$ .

Como  $f$  es continua, entonces  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que  $\delta < \delta_1$  y  $\|f(t) - f(z)\| < \epsilon$ ,  $\forall t$  que satisfice  $\|t - z\| < \delta$ , puesto que  $t$  está en el segmento que une  $z$  y  $z_1$ ,  $t \in [z, z_1]$  siempre que  $\|z - z_1\| < \delta$  entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right\| &\leq \int_0^1 \|f(t) - f(z)\| dt \\ &< \epsilon \|z_1 - z\|, \quad \forall z_1 \end{aligned}$$

que satisfice  $\|z - z_1\| < \delta$ , por lo tanto

$$\left\| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right\| < \frac{1}{\|z_1 - z\|} \epsilon \|z_1 - z\| = \epsilon, \quad \forall z_1$$

que satisfice  $\|z_1 - z\| < \delta$  entonces  $F'(z)$  existe y es igual a  $f(z)$  entonces  $F'(z) = f(z)$  analítica si  $F(z)$  lo es, por lo tanto  $f(z)$  es analítica si  $F(z)$  es analítica.

### 5.16. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.-

Sea  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ , con  $a_n \neq 0$  un polinomio de grado  $n$  entonces  $\exists z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .

#### Demostración

Demostraremos por el absurdo

Supongamos que  $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$

Como  $P(z) \rightarrow \infty$ , cuando  $|z| \rightarrow \infty$  entonces  $f(z) \rightarrow 0$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$

Esto es dado  $\epsilon > 0, \exists R > 0$  suficientemente grande tal que  $\|f(z)\| < \epsilon, \forall \|z\| > R$

Como  $f$  es analítica entonces  $f(z)$  es acotada para todo  $\|z\| < R$ , esto es  $\|f(z)\| \leq M, \forall \|z\| < R$ , así:  $\|f(z)\| \leq M + \epsilon, \forall z \in \mathbb{C}$

Luego como  $f(z)$  es analítica y acotada  $\Rightarrow f(z)$  es constante lo cual es una contradicción, por el inverso de una función polinómica no es constante, luego  $\exists z_0$  tal que  $P(z_0) = 0$

#### Demostración

Por la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

como  $z \in \gamma, z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$dz = re^{i\theta} d\theta$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$



### 5.18. TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO.-

Si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada  $\gamma$  y  $f(z)$  no es constante, entonces el máximo de  $\|f(z)\|$  ocurre sobre  $\gamma$ .

#### Demostración

$$\text{Supongamos que: } \|f(z_0)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(z_0 + re^{i\theta})\| d\theta \quad \dots (1)$$

Si  $\|f(z_0 + re^{i\theta})\| < \|f(z_0)\|$ , para cualquier  $\theta$  entonces  $\|f(z_0 + re^{i\theta})\| < \|f(z_0)\|$  para  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , integrando ambas partes

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|f(z_0 + re^{i\theta})\| d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|f(z_0)\| d\theta = \frac{1}{2\pi} \|f(z_0)\| 2\pi = \|f(z_0)\|$$

$$\text{entonces } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(z_0 + re^{i\theta})\| d\theta < \|f(z_0)\| \quad \dots (2)$$

por lo tanto (1) y (2) se contradicen, la contradicción con la desigualdad de Cauchy.

Luego el valor máximo de  $\|f(z_0)\|$  ocurre sobre la curva  $\gamma$ .

### 5.17. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS.-

Si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una circunferencia con centro en  $z_0$  y radio

$$r > 0 \text{ entonces } f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

### 5.19. TEOREMA DEL MÓDULO MÍNIMO.-

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada  $\gamma$ ,  $R(z) \in \mathbb{R}$  dentro de  $\gamma$ , entonces el mínimo de  $\|f(z)\|$  ocurre sobre  $\gamma$ .

#### Demostración

El máximo de  $\left\| \frac{1}{f(z)} \right\|$  ocurre sobre  $\gamma$ , esto es, existe un  $z_1 \in C$ , tal que

$$\left\| \frac{1}{f(z)} \right\| \leq \left\| \frac{1}{f(z_1)} \right\|, \quad \forall z \in C, \text{ que está dentro de } \gamma \text{ entonces:}$$

$$\|f(z_1)\| \leq \|f(z)\|, \quad \forall z \text{ dentro de } \gamma$$

### 5.20. TEOREMA DEL ARGUMENTO.-

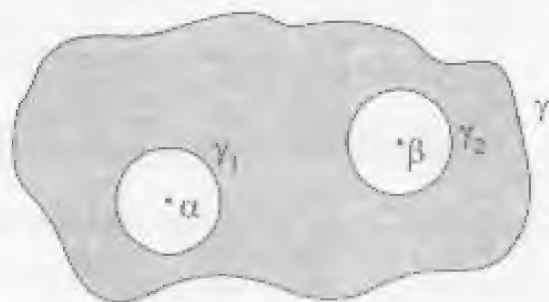
Si  $f(z)$  es una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada  $\gamma$ , excepto en un número finito de polos entonces  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$ , donde:

$$N = \text{número de ceros de } f(z) \text{ dentro de } \gamma, \quad \sum n = N$$

$$P = \text{número de polos de } f(z) \text{ dentro de } \gamma, \quad \sum p = P$$

#### Demostración

Supongamos que  $f(z)$  tenga un cero de multiplicidad "n" en  $\alpha$  y un polo de orden P en  $\beta$ .



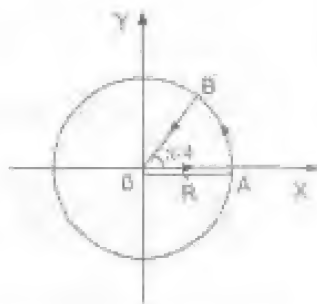
$$\oint_{\gamma} e^{i\theta} dz = \theta, \text{ donde } \gamma \text{ es cualquier curva cerrada y simple contenida en } C.$$

En particular consideremos la curva:  $\gamma = \overline{OA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BO}$  (ver figura)

Donde  $\overline{OA}$  es el semi eje positivo de longitud R ( $R > 0$  arbitrario)

$\overline{AB}$  es el arco de la circunferencia de radio R y con centro en el origen de coordenadas.

$\overline{BO}$  es la bisectriz del primer cuadrante, entonces  $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ , luego se tiene:



$$\oint_{\gamma} e^{i\theta} dz = \int_{OA} e^{i\theta} dz + \int_{AB} e^{i\theta} dz + \int_{BO} e^{i\theta} dz \quad \dots (1)$$

ahora calculamos cada una de las integrales

$$\text{denotaremos por: } I_1(R) = \int_{OA} e^{i\theta} dz = \int_0^R \cos \theta dx + i \int_0^R \sin \theta dx \quad \dots (2)$$

$$\overline{AB}: z = z(\theta) = Re^{i\theta}, \text{ donde } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = R^2 e^{2i\theta} = R^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \quad 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ además } dz = Ri e^{i\theta} d\theta$$

$$I_2(R) = \int_{AB} e^{i\theta} dz = iR \int_0^{\pi/4} e^{i\theta} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) e^{i\theta} d\theta$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad \dots (*)$$

Como  $f(z) = (z - \alpha)^N h(z)$ , entonces se tiene

$$\ln |f(z)| = N \ln |z - \alpha| + \ln |h(z)|, \text{ derivando}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z - \alpha} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \text{ ahora integrando}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{N dz}{z - \alpha} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{h'(z) dz}{h(z)} = N \quad \dots (1)$$

$$\text{como } f(z) = \frac{g(z)}{(z - \beta)^P} \Rightarrow \ln |f(z)| = \ln |g(z)| - P \ln |z - \beta|, \text{ derivando}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{P}{z - \beta}, \text{ integrando ambos miembros}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{g'(z) dz}{g(z)} - \frac{P}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z - \beta} = -P \quad \dots (2)$$

de (1), (2) y (\*) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \end{aligned}$$

### 5.21. APLICACIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY.-

$$\textcircled{1} \text{ INTEGRALES DE FRESNEL: } \int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

Para calcular estas integrales, nos apoyaremos en una función auxiliar de variable compleja,  $f(z) = e^{iz^2}$  que es analítica en todo plano complejo y por lo tanto se puede aplicar el Teorema de Cauchy, es decir:

pero como  $\|e^z\| = \|e^{u+iv}\| = e^u$ ,  $\|e^{i\theta}\| = 1$

$$\text{entonces } \|I_2(R)\| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta \quad \dots (3)$$

**OBSERVACIÓN.-** La función  $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  es decreciente en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

$$\text{es decir si } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ entonces } f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$$

$$\text{entonces } \sin \alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\text{Si } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{para } \alpha = 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta > \frac{2}{\pi}(2\theta)$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta > \frac{4\theta}{\pi} \Rightarrow R^2 \sin 2\theta > \frac{4R^2 \theta}{\pi} \text{ entonces}$$

$$-R^2 \sin 2\theta < -\frac{4R^2 \theta}{\pi} \Rightarrow e^{-R^2 \sin 2\theta} < e^{-\frac{4R^2 \theta}{\pi}}, \text{ integrando}$$

$$\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta < \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2 \theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{4R^2} \left[ 1 - e^{-R^2} \right] / \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4R^2} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4R^2} (1 - e^{-R^2}), \text{ de donde}$$



ahora demostraremos que:  $f_2(R) \rightarrow 0$ , cuando  $R \rightarrow \infty$ , para esto consideremos:

$$\begin{aligned} \|f_2(R)\| &= \left\| \oint_{\partial D} e^{z^2} dz \right\| = \left\| iR \int_0^{2\pi} e^{R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} e^{i\theta} d\theta \right\| \\ &\leq R \int_0^{2\pi} \|e^{R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}\| \|e^{i\theta}\| d\theta \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \|f_2(R)\| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \int_{\partial D} e^{z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \dots (5)$$

ahora nos falta calcular  $f_3(R)$

Sobre  $\overline{BO}$ : Si  $z \in \overline{BO} \Rightarrow z = z(t) = R(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$  donde  $t$  varía desde  $R$  hasta  $0$ , entonces tenemos

$$z^2 = R^2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = iR^2 \Rightarrow \bar{z}^2 = -iR^2$$

$$dz = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)dt, \text{ entonces}$$

$$f_3(R) = \int_{\overline{BO}} e^{z^2} dz = \int_R^0 e^{-iR^2} \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^R e^{-iR^2} dt$$

$$\text{entonces } \lim_{R \rightarrow \infty} f_3(R) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^{\infty} e^{-iR^2} dt$$

de la función Gamma se tiene:  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ , convergente,  $\forall p > 0$

$$\text{haciendo } t^2 = u \Rightarrow t = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

Si  $t \rightarrow 0$ ;  $\Rightarrow u \rightarrow 0$ ;  $t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{entonces } \lim_{R \rightarrow \infty} f_3(R) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^{\infty} e^{-iR^2} dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i \end{aligned} \quad \dots (6)$$

ahora reemplazamos (3), (5) y (6) en (1)

$$\int_0^R e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta < \frac{\pi}{4R^2} (1 - e^{-R^2}) \quad \dots (4)$$

ahora reemplazamos (4) en (3) y se obtiene:

$$\|f_2(R)\| < R \frac{\pi}{4R^2} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\oint_{\partial D} e^{z^2} dz = \int_{\overline{AO}} \cos x^2 dx + i \int_{\overline{AO}} \sin x^2 dx + 0 + f_3(R) = 0$$

$$\int_{\overline{AO}} \cos x^2 dx + i \int_{\overline{AO}} \sin x^2 dx = -f_3(R)$$

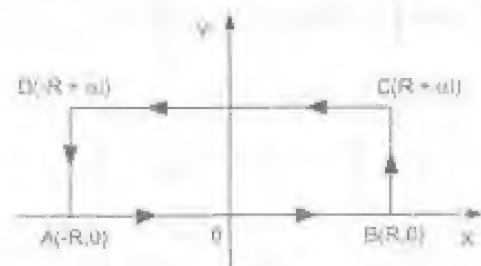
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\overline{AO}} \cos x^2 dx + i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\overline{AO}} \sin x^2 dx = -\lim_{R \rightarrow \infty} f_3(R)$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}i$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \text{ y } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

③ LA INTEGRAL:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda \alpha x) dx$ , ( $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$ )

Para calcular esta integral, consideremos la integral de la función  $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ , sobre la trayectoria cerrada  $\gamma$  que consiste del contorno del rectángulo representado por la figura.



$$\gamma = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

Como la función  $f(z) = e^{-\lambda z^2}$  es analítica,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , entonces podemos aplicar el Teorema de la integral de Cauchy, es decir:

$$\int_{\gamma} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda z^2} dz + \int_{\overline{BC}} e^{-\lambda z^2} dz + \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda z^2} dz + \int_{\overline{DA}} e^{-\lambda z^2} dz = 0 \quad \dots (1)$$

Entonces  $-\lambda(R^2 - y^2) \leq -\lambda(R^2 - x^2)$  de donde  $e^{-\lambda(R^2 - y^2)} \leq e^{-\lambda(R^2 - x^2)}$ , integrando

$$\int_{\overline{AB}} e^{-\lambda(R^2 - y^2)} dy \leq \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda(R^2 - x^2)} dy = e^{-\lambda(R^2 - x^2)} \cdot x = \frac{\alpha e^{\lambda x^2}}{e^{\lambda R^2}}$$

$$I_1(R) \leq \frac{\alpha e^{\lambda x^2}}{e^{\lambda R^2}} \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty \text{ entonces } \lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = 0 \quad \dots (3)$$

Sobre  $\overline{CD}$ :  $z = x + i\alpha$ ,  $-R \leq x \leq R$  ( $x$  varía de  $R$  hasta  $-R$ )

$$z^2 = x^2 - \alpha^2 + 2i\alpha x \Rightarrow dz = dx$$

$$\begin{aligned} I_3(R) &= \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda z^2} dz = \int_R^{-R} e^{-\lambda(x^2 - \alpha^2 + 2i\alpha x)} dx = -e^{-\lambda\alpha^2} \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda x^2} e^{-2i\lambda\alpha x} dx \\ &= -e^{-\lambda\alpha^2} \int_{\overline{CD}} e^{-\lambda x^2} (\cos 2\lambda\alpha x - i \sin 2\lambda\alpha x) dx \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) = -e^{-\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos 2\lambda\alpha x dx + ie^{-\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \sin 2\lambda\alpha x dx \quad \dots (4)$$

Sobre  $\overline{DA}$ :  $z = -R + iy$  ( $0 \leq y \leq \alpha$ ) ( $y$  varía desde  $\alpha$  hasta  $0$ )

Sobre  $\overline{AB}$ :  $z = x$ ,  $-R \leq x \leq R$   $\wedge$   $dz = dx$

$$I_1(R) = \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} dx, \text{ tomando límite cuando } R \rightarrow \infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\overline{AB}} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad \dots (2)$$

$$\text{sea } \lambda x^2 = u \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} u^{-\frac{1}{2}} du$$

Sobre  $\overline{BC}$ :  $z = R + iy$ ,  $0 \leq y \leq \alpha$

$$z^2 = R^2 - y^2 + 2Ryi \text{ y } dz = i dy$$

$$I_2(R) = \int_{\overline{BC}} e^{-\lambda z^2} dz = i \int_0^{\alpha} e^{-\lambda(R^2 - y^2 + 2Ryi)} dy = i \int_0^{\alpha} e^{-\lambda(R^2 - y^2)} e^{-2\lambda Ryi} dy$$

probaremos que:  $I_2(R) \rightarrow 0$ , cuando  $R \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \|I_2(R)\| &= \left\| \int_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)} e^{2\lambda xy} dy \right\| \\ &\leq \int_0^R |e^{-\lambda(R^2-y^2)}| |e^{2\lambda xy}| dy = \int_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)} dy \\ \text{por lo tanto: } I_2(R) &\leq \int_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)} dy \end{aligned}$$

Cuando  $R > \alpha$  y como  $0 \leq y \leq \alpha \Rightarrow y^2 \leq \alpha^2 \Rightarrow -y^2 \geq -\alpha^2$

De donde:  $R^2 - y^2 \geq R^2 - \alpha^2 \Rightarrow \lambda(R^2 - y^2) \geq \lambda(R^2 - \alpha^2)$ ,  $\lambda > 0$

$$z^2 = R^2 - y^2 - 2Riy \quad y' dz = i dy$$

$$I_3(R) = \int_0^R e^{-\lambda z^2} dz = \int_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)} e^{2\lambda xy} dy$$

Probaremos que  $I_4(R) \rightarrow 0$ , cuando  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \|I_4(R)\| &\leq \int_0^R |e^{-\lambda(R^2-y^2)}| |e^{2\lambda xy}| dy = \int_0^R e^{-\lambda(R^2-y^2)} dy \\ &\leq \alpha e^{-\lambda(R^2-\alpha^2)} = \frac{\alpha e^{\lambda \alpha^2}}{e^{\lambda R^2}} \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

es decir:  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_4(R) = 0$  ... (5)

de la ecuación (1) se tiene:  $I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + I_4(R) = 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) + \lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) + \lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) + \lim_{R \rightarrow \infty} I_4(R) = 0 \quad \dots (6)$$

ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (\*)

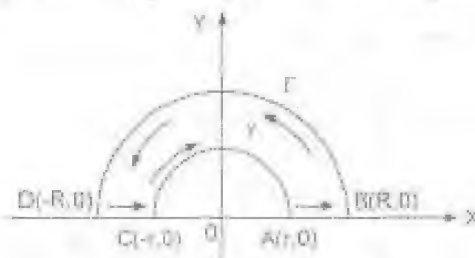
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + 0 + e^{i\pi/2} \int_0^R e^{-\lambda y^2} \cos(2\lambda xy) dy + i e^{i\pi/2} \int_0^R e^{-\lambda y^2} \sin(2\lambda xy) dy &= 0 \\ -e^{i\pi/2} \int_0^R e^{-\lambda y^2} \cos(2\lambda xy) dy + i e^{i\pi/2} \int_0^R e^{-\lambda y^2} \sin(2\lambda xy) dy &= -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\text{de donde se tiene: } \int_0^R e^{-\lambda y^2} \cos(2\lambda xy) dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda x^2} \quad \text{y} \quad \int_0^R e^{-\lambda y^2} \sin(2\lambda xy) dy = 0$$

3 La integral:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Para calcular esta integral consideremos la función  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  que es analítica en todo el dominio  $D \subseteq \mathbb{C}$  excepto en el origen de coordenadas.

Tomando la trayectoria de integración  $\gamma$  representada en la figura.



La función  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ , es analítica dentro y sobre  $C = \overline{AB} \cup \Gamma \cup \overline{DC}$ , por lo tanto, ciertas entonces por el teorema de la integral de Cauchy se tiene:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\overline{AB}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\overline{DC}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad \dots (1)$$

ahora calculamos cada una de estas integrales

Sobre  $\overline{AB}$ :  $z = x$ ,  $\epsilon \leq x \leq R$ ,  $dz = dx$ , entonces

$$\int_{\overline{AB}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx, \text{ entonces}$$

Sea  $I_1(r, R) = \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx$ , entonces cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} I_1(r, R) = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \dots (2)$$

Sobre  $\Gamma$ :  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $dz = Rie^{i\theta} d\theta$  entonces

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta$$

$$I_2(R) = i \int_0^{\pi} e^{-R \cos \theta + iR \sin \theta} d\theta \quad (\text{probaremos que } I_2(R) \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty)$$

$$\text{En efecto: } \|I_2(R)\| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \cos \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \cos \theta} d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \cos \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \Rightarrow R \cos \theta \geq \frac{2R\theta}{\pi} \text{ entonces}$$

$$-R \cos \theta \leq -\frac{2R\theta}{\pi} \Rightarrow e^{-R \cos \theta} \leq e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}, \text{ integrando}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \cos \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2R} (e^{-1} - 1)$$

$$\|I_2(R)\| \leq \frac{\pi}{R} (1 - \frac{1}{e}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = 0 \quad \dots (3)$$

Sobre  $\overline{DC}$ :  $z = x$ ,  $-R \leq x \leq -\epsilon$ ,  $dz = dx$  entonces

$$I_3(r, R) = \int_{\overline{DC}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

como  $-R \leq x \leq -\epsilon \Rightarrow \epsilon \leq -x \leq R$  entonces sustituyendo  $x$  por  $-x$  de donde se obtiene

$$I_3(r, R) = - \int_{\epsilon}^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} I_3(r, R) = - \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \dots (4)$$

Sobre  $\gamma$ :  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $dz = rie^{i\theta} d\theta$

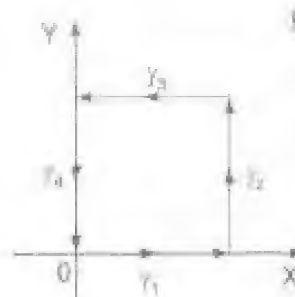
$$I_4(r) = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{ir(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta$$

Desarrollo

Sea  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$z = x + iy \Rightarrow \|z\|^2 = x^2 + y^2$$

$$dz = dx + i dy$$



$$\int_{\gamma} \|z\|^2 dz = \int_{\gamma_1} \|z\|^2 dz + \int_{\gamma_2} \|z\|^2 dz + \int_{\gamma_3} \|z\|^2 dz + \int_{\gamma_4} \|z\|^2 dz \quad \dots (1)$$

$$\gamma_1: \alpha_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad dz = dt$$



Se prueba que: cuando  $t \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz \rightarrow -i \int_0^{\pi} d\theta = -i\pi$  ... (5)

Ahora reemplazando (2), (3), (4) y (5) en (1) se tiene:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + 0 - \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0$$

de donde  $2i \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

**OBSERVACIÓN:** La integral  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ , también podemos calcular aplicando transformada de Laplace de igual manera se puede calcular por la transformada de Fourier.

## 5.22. EJERCICIOS DESARROLLADOS.

1. Calcular  $\oint_{\gamma} \|z\|^2 dz$ , donde  $\gamma$  es un cuadrado de vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,0)$ .

2. Calcular  $\oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z) \bar{z} \|z\|^2 dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

**Desarrollado**

Como  $\|z\| = 1$ , entonces  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \sin \theta, \quad z = e^{i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

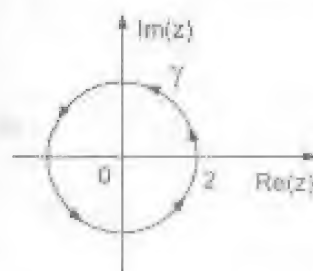
$$\|e^{i\theta}\| = \|e^{\cos \theta + i \sin \theta}\| = e^{\cos \theta} \text{ puesto que } \|e^{i\theta}\| = 1$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z) \bar{z} \|z\|^2 dz = \int_0^{2\pi} \sin \theta e^{-i\theta} e^{\cos \theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin \theta d\theta = -i e^{\cos \theta} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -i [e^{\cos 2\pi} - e^{\cos 0}] = -i [e - e] = 0$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z) \bar{z} \|z\|^2 dz = 0$$

3. Calcular  $\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) \|dz\|$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$



**Desarrollado**

Parametrizando la curva

$$\gamma: z = \|z\| e^{i\theta} = 2e^{i\theta} = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{donde } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = 2ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow \|dz\| = 2 d\theta$$

$$\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) \|dz\| = \int_0^{2\pi} [4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta] 2 d\theta$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 8 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 8[\pi + \pi] = 16\pi$$

$$\int_0^1 \|z\|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \dots (2)$$

$$\gamma_2: \alpha_2(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad dz = i dt$$

$$\int_0^1 \|z\|^2 dz = \int_0^1 (1+t^2) i dt = i \left( t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} i \quad \dots (3)$$

$$\gamma_3: \alpha_3(t) = (1-t, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad dz = -dt$$

$$\int_0^1 \|z\|^2 dz = \int_0^1 [(1-t)^2 + t^2] (-dt) = - \left( \frac{(1-t)^3}{3} + t \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{3} \quad \dots (4)$$

$$\gamma_4: \alpha_4(t) = (0, 1-t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad dz = -i dt$$

$$\int_0^1 \|z\|^2 dz = \int_0^1 [0 + (1-t)^2] (-i dt) = -\frac{(1-t)^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{i}{3} \quad \dots (5)$$

ahora reemplazamos (2), (3), (4), (5) en (1)

$$\oint_{\gamma} \|z\|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \frac{4}{3} i - \frac{4}{3} - \frac{i}{3} = -1 + i$$

3. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z}$  donde  $\gamma$  es la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

**Desarrollado**

Parametrizando la curva  $\gamma: z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

4. Comprobar que:  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = 0$  para  $n \geq 2$  donde  $\gamma$  es la circunferencia unitaria con centro en el origen, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

**Desarrollado**

Parametrizando la curva  $\gamma: z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $dz = ie^{i\theta} d\theta$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{in\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{1}{1-n} e^{i(1-n)\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{1-n} [e^{i2\pi(1-n)} - 1] = 0$$

puesto que  $e^{i2\pi(1-n)} = 1$ ,  $\forall n \geq 2$   $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = 0$

6. Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} z dz$ , a lo largo de la curva parametrizada

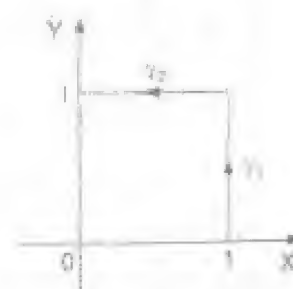
$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1+it, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-i(1-t), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

**Desarrollado**

Como  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^2 f(z(t)) z'(t) dt$ , de donde

$$z'(t) = \begin{cases} i, & 0 \leq t \leq 1 \\ -i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^1 (1+it) i dt + \int_1^2 (2-i(1-t)) (-i) dt = -\frac{1}{2} + i$$



7. Calcular la integral en forma analítica  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ , donde  $\gamma$  es la frontera del triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(2,2)$

**Desarrollado**

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

8. Probar que:  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} \leq 4$ , donde  $\gamma$  es el segmento que une  $z=1$  a  $z=4+i$

**Desarrollado**

$$\text{Como } \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} \right| \leq M L_{\gamma} \text{ donde } \left| \frac{1}{z^2} \right| \leq M \text{ y } L_{\gamma} = \int_{\gamma} \|dz\|$$



$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \text{ parametrizando}$$

$$\gamma_1: z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \gamma_2: z(t) = 2 + it, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3: z(t) = (2 - 2t) + i(2 - 2t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz + \int_{\gamma_3} z^2 dz \quad \dots (1)$$

$$\int_{\gamma_1} z^2 dz = \int_0^2 (x^2 - y^2 + 2xyi) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \quad \dots (2)$$

$$\int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 (x^2 - y^2 + 2xyi) dt = \int_0^1 (2 + it)^2 dt = \frac{i(2+it)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} [5(2/3 + i)] = \frac{10}{3} + \frac{2i}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (10e - 10i - 3) = -8 + \frac{16i}{3} \quad \dots (3)$$

$$\int_{\gamma_3} z^2 dz = \int_0^1 [2 - 2t + i(2 - 2t)]^2 dt = -8(1+i) \int_0^1 [(1-t) + i(1-t)]^2 dt$$

$$= -8(1+i) \int_0^1 [(1-t)^2 + 2i(1-t)^2 - 4(1-t)^2] dt = -16i \int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= \frac{16i}{3} (1-t)^3 \Big|_0^1 = 0 - \frac{16i}{3} = -\frac{16i}{3} \quad \dots (4)$$

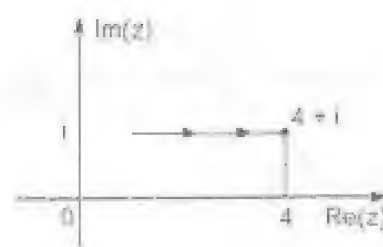
reemplazando (2), (3) y (4) en (1) se tiene:  $\int_{\gamma} z^2 dz = \frac{8}{3} - 8 + \frac{16i}{3} - \frac{16i}{3} = -\frac{16}{3}$

$$z(t) = 1 + i(4) = 4i + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$dz(t) = 4 dt \Rightarrow \int_0^1 |dz(t)| = 4$$

$$\|f(z)\| = \left\| \frac{z}{z-1} \right\| \leq 1 \Rightarrow M=1$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} \leq 4$$



9. Calcular la integral  $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z^5 dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$

#### Desarrollo

Parametrizando la curva  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$

$$\text{Es decir: } z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow z'(t) = -\sin t + i \cos t$$

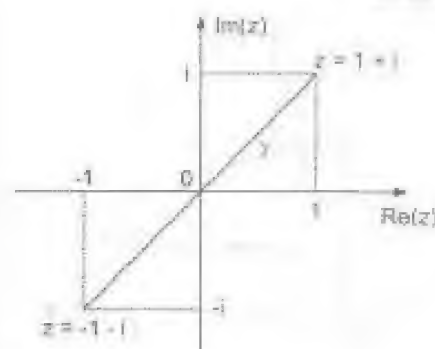
$$\text{de donde: } \operatorname{Re}(z(t)) = \cos t \Rightarrow dz(t) = i e^{it} dt$$

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re} z^5 dz = \int_0^{2\pi} \cos t i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{it} \cos t dt$$

$$= i e^{it} \left[ \frac{\cos t}{t^2 + 6^2} - 6 \frac{\sin t}{t^2 + 6^2} \right] \Big|_0^{2\pi} = 0$$

10. Probar que:  $\left\| \int_{\gamma} z^4 dz \right\| \leq 8\sqrt{2}$  donde  $\gamma$  es el segmento que une  $z = -1 - i$  y  $z = 1 + i$

#### Desarrollo



$$\text{Como } \left\| \int_{\gamma} z^4 dz \right\| \leq M L_{\gamma}$$

Parametrizando el segmento

$$\gamma: z(t) = (1 - t)(-1 - i) + t(1 + i), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma: z(t) = 2t - 1 + i(2t - 1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z'(t) = 2 + 2i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\|z'(t)\| = 2\sqrt{2}$$

$$L_{\gamma} = \int_0^1 \|dz\| = \int_0^1 2\sqrt{2} dt = 2\sqrt{2} \Rightarrow L_{\gamma} = 2\sqrt{2}$$

$$\|f(z)\| \leq M \Rightarrow f(z) = z^4(t) = (1+i)^4 \Rightarrow f(z) = 4$$

$$\Rightarrow \|f(z)\| \leq 4 \Rightarrow M=4, \text{ por lo tanto: } \left\| \int_{\gamma} z^4 dz \right\| \leq M_{\gamma} = 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

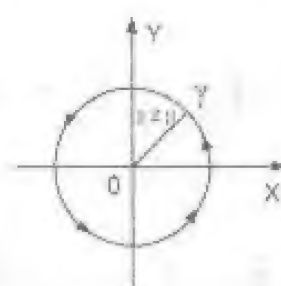
$$\Rightarrow \left\| \int_{\gamma} z^4 dz \right\| \leq 8\sqrt{2}$$

11. Probar que:  $\left\| \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq 2\pi e^2$  donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 2\}$

#### Desarrollo

$$\text{Como } \left\| \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq M L_{\gamma}, \text{ donde } \|f(z)\| \leq M \text{ y } L_{\gamma} = \int_{\gamma} \|dz\|$$

$$\|f(z)\| = \left\| \frac{e^z}{z} \right\| \leq \frac{e^{\|z\|}}{\|z\|} = \frac{e^2}{2} \Rightarrow M = \frac{e^2}{2}$$



parametrizando la curva  $\gamma$

$$\gamma: z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z(t) = 2e^{it} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{it}$$

$$\|z'(t)\| = 2$$

$$L_{\gamma} = \int_{\gamma} \|dz\| = \int_0^{2\pi} \|z'(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} dt = 4\pi \Rightarrow L_{\gamma} = 4\pi$$

$$\left\| \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq M L_{\gamma} = \frac{e^2}{2} (4\pi) = 2\pi e^2 \Rightarrow \left\| \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq 2\pi e^2$$

12. Probar que:  $\left\| \oint_{\gamma} \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq 8\pi$  donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z-1\| = 2\}$

#### Desarrollo

$$\text{Como } \left\| \oint_{\gamma} \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq M L_{\gamma}, \text{ donde } \|f(z)\| \leq M \text{ y } L_{\gamma} = \int_{\gamma} \|dz\|$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = \frac{\|z+1\|}{\|z-1\|} \text{ de donde } \|f(z)\| = \left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq M$$

$$\|z+1\| = \|z-1+2\| \leq \|z-1\| + 2, \text{ dividiendo entre } \|z-1\|$$

$$\frac{\|z+1\|}{\|z-1\|} \leq \frac{\|z-1\| + 2}{\|z-1\|} \text{ como } \|z-1\| = 2 \text{ entonces}$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = \frac{\|z+1\|}{\|z-1\|} \leq \frac{\|z-1\| + 2}{\|z-1\|} = \frac{2+2}{2} = 2 \text{ de donde}$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq 2 = M \Rightarrow M=2$$

parametrizando la curva  $\gamma$  se tiene:  $\gamma: z = z_0 + Re^{it}$ , donde  $z_0 = 1$  y  $R = 2$

$$z(t) = 1 + 2e^{it} \Rightarrow z'(t) = 2ie^{it} \Rightarrow \|z'(t)\| = 2$$



$$L_\gamma = \int_\gamma |z'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi, \text{ por lo tanto } \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq M L_\gamma = 4\pi(2) = 8\pi$$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq 8\pi$$

13 Si  $\|a\| \neq 0$  y  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = R\}$ , probar que  $\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$

**Desarrollo**

Como  $\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq M L_\gamma$  donde  $\|f(z)\| \leq M$  y  $L_\gamma = \int_\gamma |dz|$

$$\|z-a\| \|z+a\| = \|z^2 - a^2\| \geq \|z\|^2 - \|a\|^2$$

$$\frac{1}{\|z^2 - a^2\|} \leq \frac{1}{\|z\|^2 - \|a\|^2} = \frac{1}{R^2 - \|a\|^2} = M$$

$$L_\gamma = \int_\gamma |dz| = 2\pi R$$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq M L_\gamma = \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$$

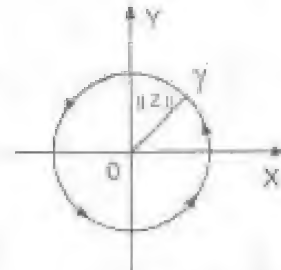
$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$$

14 Si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = R, R > 1\}$ , verificar que  $\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < 2\pi \frac{(\pi + \log R)}{R}$  y si

$R \rightarrow \infty$ , entonces la integral tiende a cero.

**Desarrollo**

Por la fórmula  $\left\| \oint_\gamma f(z) dz \right\| \leq \oint_\gamma \|f(z)\| |dz| \leq M L_\gamma$



$$\gamma: z(\theta) = 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z(\theta) = 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$$

$$\|z'(\theta)\| = 2$$

$$L_\gamma = \int_\gamma |dz| = \int_0^{2\pi} \|z'(\theta)\| d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \Rightarrow L_\gamma = 4\pi$$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq M L_\gamma = \frac{e^2}{2} (4\pi) = 2\pi e^2 \quad \therefore \left\| \oint_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right\| \leq 2\pi e^2$$

12 Probar que  $\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq 8\pi$  donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z-1\| = 2\}$

**Desarrollo**

Como  $\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq M L_\gamma$  donde  $\|f(z)\| \leq M$  y  $L_\gamma = \int_\gamma |dz|$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| = \left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \text{ de donde } \|f(z)\| = \left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq M$$

$$\|z+1\| = \|z-1+2\| \leq \|z-1\| + 2, \text{ dividiendo entre } \|z-1\|$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq \frac{\|z-1\| + 2}{\|z-1\|} \text{ como } \|z-1\| = 2 \text{ entonces}$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq \frac{\|z-1\| + 2}{\|z-1\|} = \frac{2+2}{2} = 2 \text{ de donde}$$

$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| \leq 2 = M \Rightarrow M = 2$$

parametrizando la curva  $\gamma$  se tiene:  $\gamma: z = z_0 + Re^{i\theta}$ , donde  $z_0 = 1$  y  $R = 2$

$$z(\theta) = 1 + 2e^{i\theta} \Rightarrow z'(\theta) = 2ie^{i\theta} \Rightarrow \|z'(\theta)\| = 2$$

$$L_\gamma = \int_\gamma |z'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi, \text{ por lo tanto } \left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq M L_\gamma = 4\pi(2) = 8\pi$$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{z+1}{z-1} dz \right\| \leq 8\pi$$

13 Si  $\|a\| \neq 0$  y  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = R\}$ , probar que  $\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$

**Desarrollo**

Como  $\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq M L_\gamma$  donde  $\|f(z)\| \leq M$  y  $L_\gamma = \int_\gamma |dz|$

$$\|z-a\| \|z+a\| = \|z^2 - a^2\| \geq \|z\|^2 - \|a\|^2$$

$$\frac{1}{\|z^2 - a^2\|} \leq \frac{1}{\|z\|^2 - \|a\|^2} = \frac{1}{R^2 - \|a\|^2} = M$$

$$L_\gamma = \int_\gamma |dz| = 2\pi R$$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq M L_\gamma = \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$$

$$\therefore \oint_\gamma \frac{dz}{\|z-a\| \|z+a\|} \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - \|a\|^2|}$$

14 Si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = R, R > 1\}$ , verificar que  $\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| < 2\pi \frac{(\pi + \log R)}{R}$  y si

$R \rightarrow \infty$ , entonces la integral tiende a cero.

**Desarrollo**

Por la fórmula  $\left\| \oint_\gamma f(z) dz \right\| \leq \oint_\gamma \|f(z)\| |dz| \leq M L_\gamma$

Donde  $\oint_\gamma |dz| = L_\gamma = \text{longitud de la curva}$  y  $\|f(z)\| \leq M, \forall z \in \gamma$

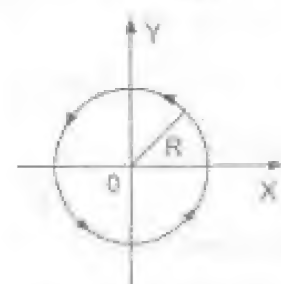
Entonces  $\log z = \log \|z\| + i(\theta + 2k\pi), \theta \in (-\pi, \pi], \|z\| = R$

Si  $k=0$ ,  $\log z = \log \|z\| + i\theta$  (logaritmo principal)

$$\|\log z\| = \|\log R + i\theta\| \leq \log R + \|\theta\| \text{ por que } R > 1$$

$$\|\log z\| \leq \log R + \pi \text{ (como } \theta \in (-\pi, \pi], \text{ el máximo valor de } \theta = \pi)$$

$$\left\| \frac{\log z}{z^2} \right\| \leq \frac{\|\log z\|}{\|z\|^2} \leq \frac{\log R + \pi}{R^2} \Rightarrow \left\| \frac{\log z}{z^2} \right\| \leq \frac{\log R + \pi}{R^2}$$



$$L_\gamma = 2\pi R$$

$$z(t) = Re^{i\theta} \Rightarrow z'(t) = Ric^{i\theta}$$

$$\|z'(t)\| = R$$

$$L_\gamma = \int_\gamma |dz| = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

En el problema  $\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| \leq M L_\gamma$

$$\left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| \leq \frac{\log R + \pi}{R^2} (2\pi R) \quad \therefore \left\| \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz \right\| \leq 2\pi \frac{(\log R + \pi)}{R}$$

Si  $R \rightarrow \infty, \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \frac{(\log R + \pi)}{R} = 0 \quad \therefore \oint_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz = 0$

15 Calcular  $\oint_\gamma [z^2 + 6iz] dz + \frac{1}{z^2} dz$  si  $\gamma: z = 3e^{i\theta}$

**Desarrollo**

$$z = 3e^{i\theta} \Rightarrow \|z\|^2 = 9 \Rightarrow \|z\| = 3$$

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 6\}$$

cuya parametrización es:

$$\gamma: z(\theta) = 6e^{i\theta} = 6(\cos \theta + i \sin \theta)$$

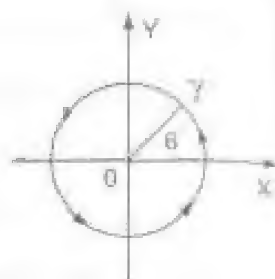
$$\gamma: z(\theta) = 6(\cos \theta + i \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy, \quad dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy$$

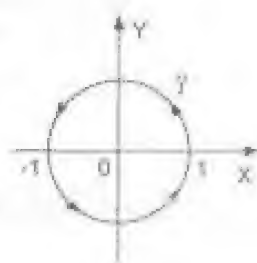
$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad 6iz = 6ix - 6iy, \quad z^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

sustituyendo en la integral se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} [(z^2 + 6iz)d\bar{z} + z^{-1}dz] &= \oint_{\gamma} (x^2 - y^2 + 2xyi + 6ix - 6iy)(dx - i dy) \\ &\quad + (x^2 - y^2 - 2xyi)(dx + i dy) \\ &= \oint_{\gamma} 2(x^2 - y^2 + 3ix - 3iy)dx + (4xy - 6ix - 6iy)dy \\ &= \int_0^{2\pi} [2(36 \cos^2 \theta - 36 \sin^2 \theta + 18 \cos \theta i - 18 \sin \theta i)(-i \sin \theta) \\ &\quad + (24 \cos \theta \sin \theta - 36 \cos \theta + 36 \sin \theta)(\sin \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (432 \sin \theta + 216) d\theta = [-432 \cos \theta + 216\theta] \Big|_0^{2\pi} = 432\pi \end{aligned}$$



- 16) Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \operatorname{Re}(z^3 + 1) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$



**Desarrollo**

$$\gamma: z(\theta) = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$\text{se sabe } \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\text{Como } \gamma: \|z - (1 + i)\| = 2 \Rightarrow \gamma: z = (1 + i) + 2e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$z = 2e^{i\theta} + (1 + i) = 2e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \bar{z} = 2e^{-i\theta} + \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z^4) dz &= -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} (2e^{-i\theta} + \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^4 (2ie^{i\theta} d\theta) \\ &= -\int_0^{2\pi} [16e^{-4i\theta} + 16\sqrt{2}e^{-3i\theta}e^{-\frac{\pi}{4}i} + 24e^{-2i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i} + 8\sqrt{2}e^{-i\theta}e^{-\frac{3\pi}{4}i} + 4e^{0i}e^{-\frac{\pi}{4}i}] d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \left[ \frac{16e^{-4i\theta}}{0} + \frac{16\sqrt{2}e^{-3i\theta}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{0} + \frac{24e^{-2i\theta}e^{-\frac{\pi}{2}i}}{0} + \frac{8\sqrt{2}e^{-i\theta}e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{0} + \frac{4e^{0i}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{0} \right] d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} 8\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} d\theta = -8\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= -16\sqrt{2}\pi e^{-\frac{3\pi}{4}i} = -8\sqrt{2}\pi \left[ \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right] \\ &= -16\sqrt{2}\pi \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 16\pi(1 + i) \end{aligned}$$

- 18) Sea  $\gamma$  el arco del círculo  $\|z\| = 2$ , que va de  $z = 2 - 4i$  a  $z = 2i$  en el primer cuadrante. Sin calcular la integral. Probar que:  $\left\| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} \right\| \leq \frac{\pi}{3}$

$$\operatorname{Re}(z^5 + 1) = \frac{1}{2}(z^5 + 1 + \bar{z}^5 + 1) = \frac{1}{2}(z^5 + \bar{z}^5 + 2)$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5 + 1) dz = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (z^5 + 2 + \bar{z}^5) dz = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (z^5 + 2) dz + \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \bar{z}^5 dz \quad \dots (1)$$

$$\text{como } z^5 + 2 \text{ es analítica entonces } \oint_{\gamma} (z^5 + 2) dz = 0 \quad \dots (2)$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5 + 1) dz &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \bar{z}^5 dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-5i\theta} e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{-4i\theta} d\theta = \frac{i}{2} \left( -\frac{e^{-4i\theta}}{4i} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{14} [e^{-14\pi i} - 1] = -\frac{1}{14} [\cos 14\pi - i \sin 14\pi - 1] = -\frac{1}{14} [1 - 0 - 1] = 0 \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{Re}(z^5 + 1) dz = 0$$

- 17) Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z^4) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z - (1 + i)\| = 2\}$

**Desarrollo**

$$\text{Aplicando la propiedad: } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \operatorname{Im}(z^4) = \frac{z^4 - \bar{z}^4}{2i}$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z^4) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^4}{2i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{\gamma} \bar{z}^4 dz \quad \dots (1)$$

$$\text{como } f(z) = z^4 \text{ es analítica entonces } \oint_{\gamma} z^4 dz = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{Luego reemplazando (2) en (1) se tiene: } \oint_{\gamma} \operatorname{Im}(z^4) dz = -\frac{1}{2i} \oint_{\gamma} \bar{z}^4 dz$$

$$\text{es decir: } \|z^3 - 1\| \geq 3 \Rightarrow \left\| \frac{1}{z^3 - 1} \right\| \leq \frac{1}{3} \quad \dots (2)$$

$$\text{ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: } \left\| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^3 - 1} \right\| \leq \frac{1}{3} \oint_{\gamma} dz = \frac{\pi}{3}$$

$$\left\| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^3 - 1} \right\| \leq \frac{\pi}{3}$$

- 19) Si  $\gamma$  es una curva suave  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  para  $a \leq t \leq b$  y si  $f$  es continua sobre  $\gamma$ , demuestre que  $\int_{\gamma} f(x, y) ds$  existe y  $\int_{\gamma} f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt$

**Desarrollo**

Sea  $P_n = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  una partición cualquiera de  $[a, b]$  y  $Q_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  una ampliación de la partición de  $P_n$ , entonces:

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^n f(x_j(t_j), y_j(t_j)) \Delta x_j(t_j) \quad \dots (1)$$

como  $\gamma$  es una curva suave, del teorema del valor medio se tiene:

$$\Delta x_j(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Delta t_j \quad \dots (2)$$

donde  $t_j^*$  es algún valor de  $t$  en  $[t_{j-1}, t_j]$ , por lo tanto de (1) y (2) se tiene:



Se conoce que:  $\| \int f(z) dz \| \leq \int \| f(z) \| dz$

En el problema planteado se tiene:  $\left\| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-1} \right\| \leq \int_{\gamma} \left\| \frac{1}{z^2-1} \right\| dz \quad \dots (1)$

como  $\| z^2 - 1 \| \geq \| z \|^2 - \| 1 \|^2 = |2^2 - 1| = 3$

por definición de la integral de Riemann  $\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{ds(t)}{dt} dt$


donde la existencia de esta integral esta asegurada puesto que  $f(x(t), y(t))$  y  $\frac{ds(t)}{dt}$  son ambas continuas en  $[a, b]$  y  $t_0, t_1 \in [t_{i-1}, t_i]$  y con esto está segura la existencia de la segunda integral.

20) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral de línea  $\oint_{\gamma} [(3x^2 e^y - x^2 y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^3 e^y + \cos y) dy]$  alrededor de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  en sentido contrario al movimiento de la manecillas del reloj.

#### Desarrollo

Como  $\oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R (\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}) dx dy$

$$\oint_{\gamma} (3x^2 e^y - x^2 y - \frac{y^3}{3}) dx + (x^3 e^y + \cos y) dy$$



$$= \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} (x^3 e^y + \cos y) - \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 e^y - x^2 y - \frac{y^3}{3})) dx dy$$

$$= \iint_R (3x^2 e^y - 3x^2 e^y + x^2 + y^2) dx dy = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$dx dy = r dr d\theta$

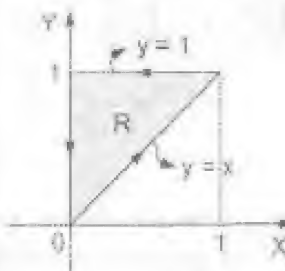
21) Aplicando el teorema de Green, calcular la integral de línea  $\oint_{\gamma} (\frac{2}{3} x^3 - x^2 y) dx + x^3 y^2 dy$  en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la frontera del triángulo cuyos vértices son (0,0), (0,1), (1,1).

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^n f(x(t_j), y(t_j)) \frac{dx(t_j)}{dt} \Delta t_j$$

ahora tomamos límite cuando  $\| P_n \| \rightarrow 0$

$$\lim_{\| P_n \| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta x_j = \lim_{\| P_n \| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x(t_j), y(t_j)) \frac{dx(t_j)}{dt} \Delta t_j$$

#### Desarrollo



$$\oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R (\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}) dx dy$$

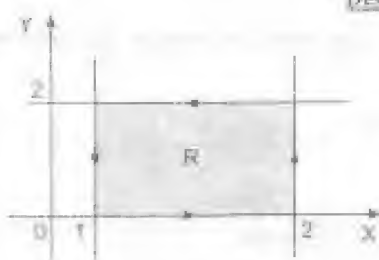
$$\oint_{\gamma} (\frac{2}{3} x^3 - x^2 y) dx + x^3 y^2 dy = \iint_R (\frac{\partial}{\partial x} (x^3 y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{2}{3} x^3 - x^2 y)) dx dy$$

$$= \iint_R (2xy^2 - 2xy^2 + x^2) dx dy = \iint_R x^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 x^2 y \Big|_0^1 dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

22) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral curvilínea  $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$ , donde  $\gamma$  es el contorno del rectángulo dado por  $1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$ .

#### Desarrollo



$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Q(x, y) = y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy = \iint_R (\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}) dx dy$$

$$= \iint_R (y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dx dy = \iint_R y^2 dx dy = \int_0^2 \int_0^2 y^2 dy dx$$

$$= \int_0^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 dx = \int_0^2 \frac{8}{3} dx = \frac{8}{3} (2 - 0) = \frac{16}{3}$$

Sea  $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función cualquiera de la variable compleja  $z = x + iy$  definida a lo largo del contorno  $\gamma : z = z(t); a \leq t \leq b$ . Demuestre que si existen las integrales de línea del lado derecho, entonces  $\int_{\gamma} F(z) dz = \int_a^b u dx - v dy + i \int_a^b v dx + u dy$

#### Desarrollo

Sea  $P_n = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_n]$ , una partición de  $[a, b]$  y  $Q_n = [t_1, t_2, \dots, t_n]$  una ampliación de la partición  $P_n$  entonces:

$$\sum_{j=1}^n F(z_j) \Delta z_j = \sum_{j=1}^n (u(x_j, y_j) + i v(x_j, y_j)) [\Delta x_j + i \Delta y_j]$$

$$\sum_{j=1}^n (u(x_j, y_j) \Delta x_j - v(x_j, y_j) \Delta y_j) + i \sum_{j=1}^n (v(x_j, y_j) \Delta x_j + u(x_j, y_j) \Delta y_j)$$

24) Sea  $\gamma$  el círculo  $\| z - z_0 \| = R$ , en sentido contrario del las agujas del reloj, usar la representación paramétrica  $z = z_0 + R e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , para deducir la siguiente fórmula:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

#### Desarrollo

$\gamma : \| z - z_0 \| = R$  entonces  $\gamma(\theta) = z_0 + R e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$

como  $F(z) = \frac{1}{z - z_0} \Rightarrow F(\gamma(\theta)) = \frac{1}{z_0 + R e^{i\theta} - z_0} = \frac{1}{R e^{i\theta}}$  además  $\gamma'(\theta) = R i e^{i\theta}$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R i e^{i\theta}}{R e^{i\theta}} d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi i$$

25) Verificar el teorema del Cauchy para la función  $F(z) = z^5 - iz^2 - 5z + 2i$ , si  $\gamma$  es la elipse  $\| z - 3i \| + \| z + 3i \| = 20$

#### Desarrollo

Por demostrar que  $\int_{\gamma} F(z) dz = 0$

$$= \sum_{i=1}^n [u(x_i, y_i) \Delta x_i - v(x_i, y_i) \Delta y_i] - \sum_{i=1}^n [v(x_i, y_i) \Delta x_i + u(x_i, y_i) \Delta y_i]$$

como las integrales de línea  $\int_{\gamma} u dx - v dy$  e  $\int_{\gamma} v dx + u dy$  existen entonces el límite del lado derecho existe cuando  $\|P_n\| \rightarrow 0$  y es por definición la integral  $\int_{\gamma} F(z) dz$ ; es decir:

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(z_i) \Delta z_i = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [u(x_i, y_i) \Delta x_i - v(x_i, y_i) \Delta y_i] + i \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [v(x_i, y_i) \Delta x_i + u(x_i, y_i) \Delta y_i]$$

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

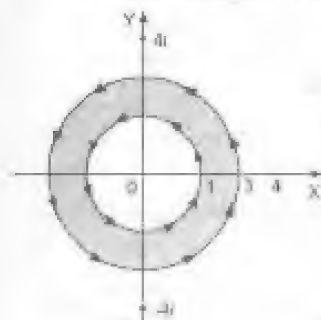
$$= - \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 - 2y - 5, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy - 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy + 2x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 - 2y - 5 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F(z) dz &= - \iint_R [(-6xy - 2x) + (6xy + 2x)] dx dy + \\ &+ i \iint_R [(3x^2 - 3y^2 - 2y - 5) - (3x^2 - 3y^2 - 2y - 5)] dx dy \\ &= - \iint_R 0 dx dy + i \iint_R 0 dx dy = 0 \end{aligned}$$

26. Calcular la integral  $\int_{\gamma} \frac{(\cosh z + \operatorname{sen} z)^2}{z^4(z^2 + 16)} dz$ , donde  $\gamma$  es la frontera de  $\|z\| < 3$  orientada en sentido antihorario junto con la circunferencia  $\|z\| = 1$  orientada en sentido horario.



**Desarrollo**

$F(z)$  no es analítica en  $z=0$ ,  $z=\pm 4i$  pero como no están en el interior de la región que encierra  $\gamma$  entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{(\cosh z + \operatorname{sen} z)^2}{z^4(z^2 + 16)} dz = 0$$

27. Si  $G(z_0) = \int_{\gamma} \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz$ ,  $z_0 = 2$ , calcular  $G(2)$  donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 3\}$  es orientada en sentido positivo.

**Desarrollo**

Por el teorema Cauchy para las integrales se tiene:

$$\text{donde } f(z) = z^2 + 4z^4 - 2z^2 + 1$$

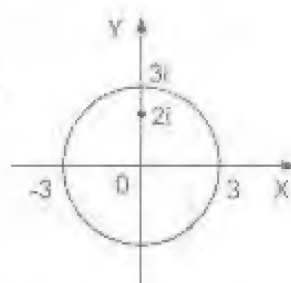
$$f'(z) = 6z^3 + 16z^3 - 4z \Rightarrow f''(z) = 30z^2 + 48z^2 - 4$$

$$f'''(z) = 120z + 96z \Rightarrow f'(z) = 360z^2 + 96$$

$$f'(2i) = 360(2i)^2 + 96 = -1440 + 96 = -1344$$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} (-1344) = -\frac{2688}{1} \pi i$$

30. Si  $\gamma$  es una circunferencia en el sentido positivo, de radio 1 y centro en  $z_0 = 0$ , demuestre que:



Como  $\gamma$  es una elipse se cumple el teorema de Green

$$F(z) = z^2 - iz^2 - 5z + 2i, \text{ siendo } z = x + iy$$

$$F(z) = \frac{(x^2 - 3xy^2 - 2xy - 5x) + i(3x^2y - y^3 + x^2 - y^2 - 5y + 2)}{u(x,y)} + i \frac{v(x,y)}{v(x,y)}$$

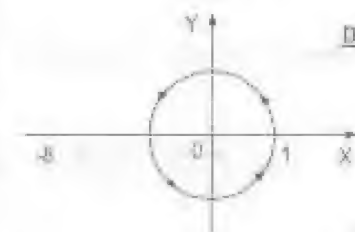
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F(z) dz &= \oint_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy) \quad (\text{por Teorema de Green}) \\ &= \iint_R \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$G(z_0) = 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz, \text{ donde}$$

$$f(z_0) = 2z_0^2 - z_0 - 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 2 - 2 = 4$$

$$\therefore \int_{\gamma} \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz = 2\pi i f(2) = 8\pi i$$

28. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z}$ , donde  $\gamma: \|z\| = 1$  esta orientada en sentido antihorario.



**Desarrollo**

En  $z_0 = 0$ ,  $f(z) = \frac{1}{z+8}$  es analítica en  $\gamma: \|z\| = 1$  y  $z_0 = 0$  esta en el interior de  $\gamma$

$$\text{Luego } \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z} = \oint_{\gamma} \frac{1}{z} \frac{dz}{z+8} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f'(z)$$

$$\text{Como } f(z) = \frac{1}{z+8} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{8} \quad \therefore \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 8z} = 2\pi i f(0) = \frac{\pi i}{4}$$

29. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^2} dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 3$

**Desarrollo**

Aplicando la fórmula de la integral de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} f'(2i)$$

31. Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z - 1)^{450}}$ , donde

a)  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z - 1\| = 6\}$

b)  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 4\}$

**Desarrollo**

a)



$\gamma: \|z - 1\| = 6$ ,  $z_0 = 1$  está dentro de  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$f(z) = e^z \Rightarrow f^{(449)}(z) = e^z$$

$$f^{(449)}(1) = e^1$$



$$a) \oint_{\gamma} \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i$$

$$b) \oint_{\gamma} \frac{a \sin z + b \cos z}{z} dz = 2\pi i b$$

### Desarrollo

a) Aplicando la integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i f(0) \text{ donde } z=0 \text{ está en el interior de } \gamma$$

$$f(z) = e^z \cos z \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{e^z \cos z}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

b) Se conoce que  $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$  donde  $z_0 = 0$

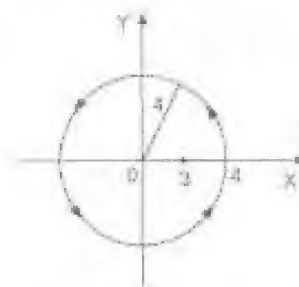
$$f(z) = a \sin z + b \cos z \Rightarrow f(0) = b$$

$$\oint_{\gamma} \frac{a \sin z + b \cos z}{z} dz = \oint_{\gamma} \frac{a \sin z + b \cos z}{z - 0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i b = 2\pi i b$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{a \sin z + b \cos z}{z} dz = 2\pi i b$$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-3)^{49}} = \frac{2\pi i}{449!} f^{(449)}(3) = \frac{2\pi i e^3}{449!}$$

b)



$\gamma: \|z\| = 4, z_0 = 5$  está dentro de  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-3)^{49}} = \frac{2\pi i f^{(449)}(3)}{449!} = \frac{2\pi i e^3}{449!}$$

32

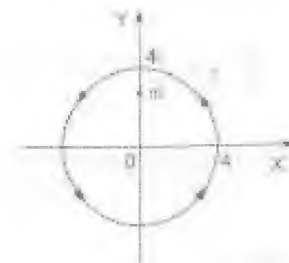
Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 4$

### Desarrollo

$z_0 = \pi i$  está en el interior de  $\gamma, \|z\| = 4 \text{ y } f(z)$

y  $f(z) = \sinh^2 z + \cos z$ , entonces

$$\oint_{\gamma} \frac{\sinh^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz = 2\pi i f(\pi i)$$



$$f(z) = \sinh^2 z + \cos z \Rightarrow f(\pi i) = \sinh^2(\pi i) + \cos \pi i = 0 + \cosh \pi$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{\sinh^2 z + \cos z}{z - \pi i} dz = 2\pi i f(\pi i) = 2\pi i \cosh \pi$$

33

Comprobar que la integral  $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz$  sobre la circunferencia de radio 1 y centro en el origen, a partir del punto de argumento  $\alpha$ , es función de dicho argumento y calcular dicha integral, caso particular:  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

### Desarrollo

Sea  $\gamma: z = e^{i\theta}$  la circunferencia parametrizada donde  $dz = ie^{i\theta} d\theta$ , entonces:

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{\frac{i\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{\frac{3i\theta}{2}} d\theta = \left[ \frac{4}{3i} e^{\frac{3i\theta}{2}} \right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = \frac{4}{3} [e^{\frac{3i(\alpha+2\pi)}{2}} - e^{\frac{3i\alpha}{2}}]$$

$$= \frac{4}{3} e^{\frac{3i\alpha}{2}} (e^{3i\pi} - 1) = \frac{4}{3} e^{\frac{3i\alpha}{2}} (\cos \frac{8\pi}{2} + i \sin \frac{8\pi}{2} - 1)$$

$$= \frac{4}{3} e^{\frac{3i\alpha}{2}} (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{4}{3} e^{\frac{3i\alpha}{2}} (-3 + i\sqrt{3})$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = \frac{4}{3} e^{\frac{3i\alpha}{2}} (-3 + i\sqrt{3})$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{2} \frac{3\pi i}{2}} = e^{3\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = \frac{4}{3} (-3 + i\sqrt{3})$$

34

Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z^2 + z}$  sobre

a)  $\gamma: \|z\| = 2$

b)  $\gamma: \|z\| = \frac{1}{2}$

c)  $\gamma: \|z - \frac{1}{2}\| = 1$

### Desarrollo

a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$

b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh 2z}{(z - \frac{\pi}{4})^3} dz$

### Desarrollo



a)

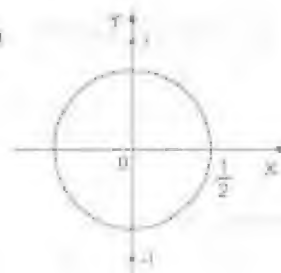
$$\frac{1}{z^2 + z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z^2 + z} = \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z-i} dz$$

$$= 2\pi i [\cos 0 - \frac{1}{2} \cos(-i) - \frac{1}{2} \cos i]$$

$$= 2\pi i [1 - \frac{1}{2}(2 \cosh 1)] = 2\pi i (1 - \cosh 1) = 2\pi i (1 - \cosh 1)$$

b)

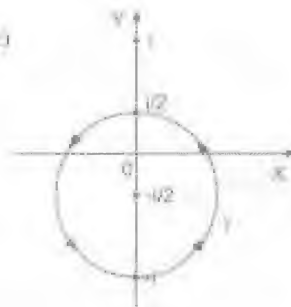


$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

$$\text{donde } f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 1} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + z} dz = 2\pi i$$

c)



$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z+i)} dz$$

$f(z) = \frac{\cos z}{z+i}$  es analítica sobre  $\gamma$  en el interior de  $\gamma: \|z - \frac{i}{2}\| = 1$

$$\frac{1}{z(z+i)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+i}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + z} dz = \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz - \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz = [2\pi i \frac{\cos 0}{0+i} - 2\pi i \frac{\cos i}{i+i}]$$

$$= i[2\pi - \pi \cosh 1] = 2\pi i [1 - \frac{\cosh 1}{2}]$$

35

Si  $\gamma$  es el rectángulo:  $x = \pm 4; y = \pm 4$ , descrito en dirección positiva, calcular:

a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$

b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh 2z}{(z - \frac{\pi}{4})^3} dz$

### Desarrollo

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos^2 z}{z^2} dz = \oint_{\gamma} \frac{\cos^2 z}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0), \text{ donde}$$

$$f(z) = \cos^2 z \Rightarrow f'(z) = -2 \cos z \sin z = -\sin 2z$$

$$f''(z) = -2 \cos 2z \Rightarrow f''(0) = -2$$

Aplicando la integral  $\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^5} = \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-0)^5} = \frac{2\pi i}{5!} f^{(4)}(0)$ , donde

$$f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \Rightarrow f''(z) = e^z \Rightarrow f'''(z) = e^z \Rightarrow f^{(4)}(z) = e^z \text{ de donde } f^{(4)}(0) = 1$$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^5} = \frac{2\pi i}{5!} f^{(4)}(0) = \frac{2\pi i}{120} (1) = \frac{\pi i}{60}$$

b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh 2z dz}{(z - \frac{\pi}{4})^4} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(\frac{\pi}{4})$ , de donde  $R(z) = \sinh 2z$

$$f(z) = 2 \cosh 2z \Rightarrow f'(z) = 4 \sinh 2z$$

$$f''(z) = 8 \cosh 2z \Rightarrow f^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 8 \cosh \frac{\pi}{2}$$

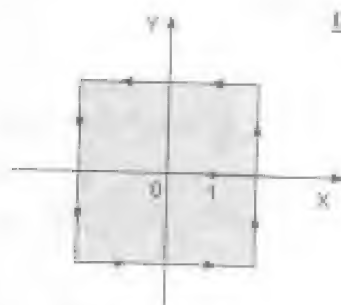
$$\oint_{\gamma} \frac{\sinh 2z dz}{(z - \frac{\pi}{4})^4} = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\pi i}{6} (8 \cosh \frac{\pi}{2}) = \frac{8\pi i}{3} \cosh \frac{\pi}{2}$$

36) Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \frac{\cos^2 z}{z^3} dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo  $|z| = 1$  y  $t > 0$

Desarrollo

Como  $\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$ , entonces

38) Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz$ , donde  $\gamma$  es el cuadrado con vértices en  $1+3i, -3+3i, -3-3i, 1-3i$



Desarrollo

Aplicando la integral

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{A(z-1)^2 + Bz(z-1) + Cz^2}{z(z-1)^2} \text{ de donde } 1 = A(z^2 - 2z + 1) + B(z^2 - z) + Cz^2$$

$$1 = (A+B)z^2 + (C-2A-B)z + A, \text{ por identidad}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B=0 \\ A=1 \end{cases} \text{ resolviendo } \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz = \oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{z} dz - \oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{z-1} dz + \oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{(z-1)^2} dz$$

$$= 2\pi i (2) - 2\pi i (2) + 2\pi i (3\pi \cos \pi) = 4\pi i - 4\pi i + 6\pi^2 i = 6\pi^2 i$$

$$= \oint_{\gamma} \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz = 6\pi^2 i$$

Calcular la integral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} dz$ ,  $t > 0$ , alrededor del cuadrado con vértices en  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ .

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z} dz = \frac{2\pi i}{1!} f^{(0)}(0) = \pi i (-2t^2) = -2\pi i t^2$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos^2 z}{z^3} dz = -2\pi i t^2$$

37) Si  $t > 0$  y  $\gamma$  es una curva simple cerrada alrededor de  $z = -1$  probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = (1 - \frac{t^2}{2})e^{-t}$$

Desarrollo

$$\text{Como } \oint_{\gamma} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(-1) \text{ donde } f(z) = ze^{zt}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \frac{f^{(2)}(-1)}{2!} = \frac{f^{(2)}(-1)}{2} \quad \dots (1)$$

$$f(z) = ze^{zt} \Rightarrow f'(z) = e^{zt} + ze^{zt} \Rightarrow f''(z) = te^{zt} + e^{zt} + ze^{zt}$$

$$f''(z) = 2e^{zt} + ze^{zt} \Rightarrow f''(-1) = (2t - t^2)e^{-t} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \frac{f^{(2)}(-1)}{2} = \frac{1}{2} (2t - t^2)e^{-t} = (1 - \frac{t^2}{2})e^{-t}$$

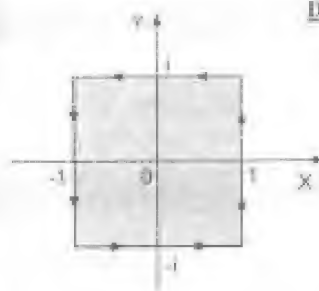
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = (1 - \frac{t^2}{2})e^{-t}$$

Desarrollo

Aplicando la fórmula de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$



$$\frac{A(z+i)(z-i) + Bz(z-i) + Cz(z+i)}{z(z+i)(z-i)}$$

$$1 = A(z^2+1) + Bz^2 - Biz + Cz^2 + Ciz \text{ de donde } 1 = (A+B+C)z^2 + (C-B)iz + A$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ C-B=0 \\ A=1 \end{cases} \text{ resolviendo } \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z+i} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z-i} dz \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} [2\pi i (e^0) - \frac{1}{2} 2\pi i e^{-t} - \frac{1}{2} 2\pi i e^t] = \frac{2\pi i}{2\pi i} [1 - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^t]$$

$$= 1 - \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 - \cosh t$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} dz = 1 - \cosh t$$



Probar que si la función  $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z}$  es analítica en todo punto interior a  $\gamma$

$$\text{entonces: } g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

### Desarrollo

Si  $z \in D \cap h$  están en  $\gamma$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{s-(z+h)} - \frac{1}{s-z} \right) f(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \left( \frac{s-z-h}{(s-(z+h))(s-z)} \right) f(s)ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \left( \frac{h}{(s-z-h)(s-z)} \right) f(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)} \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(s-z-h)(s-z)} = \frac{1}{(s-z)^2} + \frac{h}{(s-z-h)(s-z)^2} \quad \text{--- (2)}$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z)^2} + \frac{h}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2}$$

ahora debemos demostrar que:  $\frac{h}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2} \rightarrow 0$ , cuando  $h \rightarrow 0$

como  $f(s)$  es analítica en  $\gamma$  podemos hallar un número positivo  $M$  tal  $|f(s)| < M$  y sea  $L$  la longitud de  $\gamma$ , entonces:  $\|s-h-z\| > \|s-z\| - \|h\| \geq d - \|h\|$

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z-h)(s-z)^2} \right| \leq \frac{|h|ML}{(d-\|h\|)^2}, \quad 0 < \|h\| < d$$

( $d$  es la distancia más corta desde  $z$  hasta el punto  $s$  de  $\gamma$ )

entonces esta última fracción tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero, luego

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z)^2} \\ &= g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z)^2} \end{aligned}$$

### 5.23. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- Calcular  $\int_{\gamma} \|z\| dz$ , donde  $\gamma$  es el contorno cerrado compuesto por la semicircunferencia superior  $\|z\| = 1$  y por el segmento  $-1 \leq x \leq 1, y = 0$
- Evalúe  $\int_{\gamma} e^z dz$ , donde  $\gamma$  es la recta que une  $1$  con  $i$
- Evalúe  $\int_{\gamma} z^2 dz$ , donde  $\gamma$  es la trayectoria en el primer cuadrante sobre el círculo  $\|z\| = 1$  que une  $1$  con  $i$
- Sean  $\gamma_1: z(t) = e^{it}$  y  $\gamma_2: z(t) = e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Evalúe  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$  a lo largo de cada curva.
- Calcular  $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$ , donde la representación paramétrica de  $\gamma$  es:
  - El semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$
  - El semicírculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
  - El círculo  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- Calcule  $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^2+1} dz$  integrando a lo largo del contorno  $|y| = x^2 + 1$
- Evalúe  $\int_{\gamma} z dz$  a lo largo del contorno  $\gamma$  dado por:
  - El segmento de recta  $x + y = 1$
  - La parábola  $y = (1-x)^2$
  - La porción del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  que se encuentra en el primer cuadrante.

Use una representación paramétrica para calcular la integral.

- $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ , a lo largo de  $\|z\| = 1$ , en el semiplano superior
- $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ , a lo largo de  $\|z\| = 1$ , en el semiplano inferior
- $\int_{\gamma} z^2 dz$ , a lo largo de  $\|z\| = 1$ , en el primer cuadrante

Evalúe la integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$

- $f(z) = iz^2$ ,  $\gamma$  es el segmento de recta de  $1+2i$  a  $3+i$
- $f(z) = \|z\|^2$ ,  $\gamma$  es el segmento de recta de  $-4$  a  $i$
- $f(z) = \sin 2z$ ,  $\gamma$  es el segmento de recta de  $-i$  a  $-4i$
- $f(z) = \ln(z)$ ,  $\gamma$  es la circunferencia de radio  $1$  con centro en  $i$ , orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
- $f(z) = z\bar{z}$ ,  $\gamma: z(t) = \sin t + i \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$

Hallar el valor numérico de  $\int_{\gamma} z dz$  desde  $z = 0$  a  $z = 4+2i$  a lo largo de la curva

$$\gamma: z = z(t) = t^2 + it$$

Hallar el valor numérico de  $\int_{\gamma} (x^2 - iy^2) dz$ , a lo largo de:

- $\gamma: y = 2x^2$  desde  $(1,1)$  a  $(2,8)$
- De las líneas rectas de  $(1,1)$  a  $(1,8)$  y luego de  $(1,8)$  a  $(2,8)$

13. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} (5z^4 - z^3 + 2) dz$  alrededor de:

- El círculo  $\|z\| = 1$
- El cuadrado con vértices en  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$
- La curva  $y = x^2$  desde  $(0,0)$  a  $(1,1)$
- La curva  $y^2 = x$  desde  $(1,1)$  a  $(0,0)$

14. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-2}$  alrededor de:

- El círculo  $\|z-2\| = 4$
- El círculo  $\|z-1\| = 5$
- El cuadrado con vértices en  $2 \pm 2i$ ,  $-2 \pm 2i$

15. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dS$  alrededor del círculo  $\|z\| = 2$  donde  $S$  es la longitud de arco.

16. Calcular la integral  $\int_{AB} f(z) dz$ , donde  $f(z) = (y+1) - xi$  siendo  $\overline{AB}$  el segmento que une los puntos  $z_A = 1$  y  $z_B = -i$

17. Calcular la integral  $\int_{AB} f(z) dz$ , donde  $f(z) = x^2 + y^2$  siendo  $\overline{AB}$  el segmento rectilíneo que une los puntos  $A(1+i)$  y  $B(2+3i)$

18. Calcular  $\int_{\gamma} z dz$ , donde  $\gamma$  es el contorno cerrado  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$

19. Calcular la integral de línea  $\int_{\gamma} x^2 y^3 dx$ , donde  $\gamma$  es el arco  $z(t) = t(1+it^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

20. Calcular  $\int_{\gamma} \frac{1 - \frac{b}{a} i^2}{x} dy$ , donde  $\gamma$  es la elipse  $z = a \cos t + ib \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

21. Calcular la integral de línea  $\int_{\gamma} \frac{z}{y} dz$ , donde  $\gamma$  es el arco  $z = \sin t + i \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

46. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \|z\|^2 dz$ , alrededor del cuadrado con vértices en  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ .

47. Calcular  $\oint_{\gamma} (z^2 + 6z) dz$  si  $\gamma: z = 3e^{it}$ .
48. Calcular  $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z^k + 1) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ .
49. Calcular  $\int_{\gamma} \operatorname{Im}(z) \bar{z} \|z\|^2 dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ .
50. Calcular  $\int_{\gamma} \frac{4z-1}{z^2+3z+2} dz$  si  $\gamma: \|z\| = 3$ .
51. Calcular  $\int_{\gamma} e^z dz$ , donde  $\gamma$  es el parámetro del cuadrado de vértice  $z=0$ ,  $z=i$ ,  $z=1$ ,  $z=1+i$ .
52. Calcular  $\int_{\gamma} \frac{1z+4iz}{z^2+2z+5} dz$ , donde  $\gamma$  es dado por:
- a)  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$       b)  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z-1-i\| = 2\}$
53. Calcular  $\int_{\gamma} \|z\|^2 dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 3\}$ .
54. Calcular la integral en forma analítica  $\int_{\gamma} z^3 dz$ , donde  $\gamma$  es la frontera del triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  y  $(2,2)$ .
55. Calcular  $\int_{\gamma} z^3 dz$ , donde  $\gamma$  es la curva que une los puntos  $z_1=0$ ,  $z_2=2+i$ ,  $z_3=4+i$ .
56. Calcular  $\int_{\gamma} z^n dz$ , si  $\gamma: z(t) = (1+i)t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
57. Calcular  $\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma: \|z-z_0\| = R$ .
58. Calcular  $\int_{\gamma} \|z\|^2 dz$ ,  $\gamma$  segmento que une  $z=1+i$ ,  $z=6+7i$ .
59. Calcular  $\oint_{\gamma} (x^2 + y^2) \|dz\|$ , si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 2\}$ .

60. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \bar{z} dz$  alrededor de:
- a) El círculo  $\|z-2\| = 3$       b) La elipse  $\|z-3\| + \|z+3\| = 10$
- c) El cuadrado con vértices en  $z=0$ ,  $2$ ,  $2i$  y  $2+2i$ .
61. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} (8\bar{z}+3z) dz$  alrededor de la hipocicloide  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .
62. Sean  $P(z, \bar{z})$  y  $Q(z, \bar{z})$  continuas y con derivadas parciales continuas en una región  $R$  y sobre su frontera  $\gamma$  probar que:  $\oint_{\gamma} P(z, \bar{z}) dz + Q(z, \bar{z}) d\bar{z} = 2i \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dA$ .
63. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+2} dz$  si  $\gamma: \|z\| = 1$ .
64. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+2} dz$  si  $\gamma: \|z-2\| = 2$ .
65. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{1+e^z}$  si  $\gamma: \|z\| = \pi$ .
66. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + bz + 1}$ ,  $0 < b < 1$ , si  $\gamma: \|z\| = b$ .
67. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh z}{z^{\alpha+1}}$ , si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ .

22. Calcular la integral de línea  $\int_{\gamma} \frac{1+i}{y} dy$ , donde  $\gamma$  es el arco,  $z = t + it^2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .

36. Calcular la integral de línea  $\oint_{\gamma} (2xy^2 + \sin x) dx + (2x^2y + \cos x) dy$ , donde  $\gamma$  es la elipse  $z = a \cos t + ib \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
37. Calcular la integral de línea  $\oint_{\gamma} \left( x + \frac{xy}{2} + 1 \right) dx + \frac{x^2}{2} (1-y) dy$ , donde  $\gamma$  es cualquier circunferencia de radio unitario.
38. Si  $\gamma$  es cualquier contorno cerrado simple en el plano  $XY$ , y si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas arbitrarias. Demuestre que:  $\oint_{\gamma} f(x) dx + g(y) dy = 0$ .
39. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^3 - x^3y) dy$ , donde  $\gamma$  es un cuadrado con vértices en  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,2)$ ,  $(0,2)$ .
40. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} (5x+6y-3) dx + (3y-4x+2) dy$  alrededor de un triángulo en el plano  $XY$  con vértices en  $(0,0)$ ,  $(4,0)$  y  $(4,3)$ .
41. Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada que limita una región que tiene área  $A$ , probar que:  $A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx$ .
42. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} x^2 y dx + (y^3 - xy^2) dy$ , donde  $\gamma$  es la frontera de la región que encierra los círculos  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 16$ .
43. Probar que  $\oint_{\gamma} (y^2 \cos x - 2e^x) dx + (2y \sin x + 2xe^x) dy = 0$  alrededor de cualquier curva simple cerrada  $\gamma$ .
44. Demostrar que  $\int_{\gamma} (2xy^3 - 2y^3 - 6y) dx + (3x^2y^2 - 4xy - 6x) dy$  es independiente del camino que une los puntos  $(2,1)$  y  $(3,2)$  y hallar el valor numérico de la integral.
45. Si  $\gamma$  es una curva simple cerrada que encierra una región de área  $A$ , probar que:  $A = \frac{1}{2i} \oint_{\gamma} \bar{z} dz$ .

57. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh z dz}{z(z-\frac{\pi}{6})^4}$  si  $\gamma: \|z\| = 1$ .
58. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2 + \pi^2)^2}$  si  $\gamma: \|z\| = 4$ .
59. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{e^{-iz} dz}{(z+2)^{n+1}}$ , si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 3\}$ .
60. Sea  $\gamma$  el círculo  $\|z\| = 4$  orientado positivamente. Hallar el valor de la integral  $\oint_{\gamma} \frac{kz^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ .
61. Demostrar que si  $f$  es analítica en el interior y sobre un contorno cerrado simple  $\gamma$  y  $z_0$  no está sobre  $\gamma$  ( $z_0$  está en el interior), entonces:  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ .
62. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3+4}$  si  $\gamma: \|z\| = 2$ .
63. Determinar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} e^z dz$  alrededor del círculo  $\|z\| = 1$  y demostrar que:  $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0$ .
64. Sea  $n$  un entero cualquiera,  $r$  un número real positivo y  $z_0$  una constante compleja. Compruebe que si  $r > 0$   $\oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$  donde  $\gamma: \|z-z_0\| = r$ .



- Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)}$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z - \frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)\| = 1\}$ ,  $\log z$  es la rama principal de  $\log z$ .
55. Calcular la integral en forma analítica  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^k - 1}$  donde  $\gamma: \|z\| = 2$
56. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{z^4 + 4z^3 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : -4 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 4, -4 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 4\}$

65. Si  $n$  es un entero positivo, mostrar que:
- $$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \cos(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \sin(\theta) \cos(n\theta) d\theta = 0$$
66. Si  $\gamma$  es el círculo  $\|z\| = R$ , mostrar que:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z - 2)} dz = 0$

67. Hacer uso del resultado de (66) para deducir que si  $\gamma$  es el círculo  $\|z - 2\| = 5$ , entonces:  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0$
68. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{e^z(z-2)}$  alrededor  $\gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
69. Evalúe  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z + \operatorname{sen} z}{(z^2 + 25)(z+1)} dz$  alrededor de  $\gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
70.  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(e^z + \cos z)}{(z-1)^2(z+3)} dz$ , alrededor de  $\gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
71. Evalúe  $\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2} dz}{(z-2i)(z-1)^2}$ , alrededor de  $\gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
72. Evalúe  $\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^2 + z + 1} dz$ , alrededor de  $\gamma: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
73. Evalúe  $\oint_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^{20}} dz$ , alrededor de  $\gamma: \|z\| = 1$
74. Evalúe  $\oint_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^6} dz$ , alrededor de  $\gamma: \|z\| = 1$
75. Evalúe  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\operatorname{senh} z}{z^2 + z + 1} dz$ , alrededor de  $\gamma: \|z - 3i\| = 2$
76. Evalúe  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\cos(\operatorname{senh} z) dz}{z^2 + z + 1}$ , alrededor de  $\gamma: \|z - 1 - i\| = \frac{3}{2}$
77. Sea  $f(z)$  una función analítica, tanto sobre un contorno simple cerrado  $\gamma$  como en su interior, sean  $z_1$  y  $z_2$  dos puntos del interior de  $\gamma$ . Demuestre que:
- $$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{f'(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f'(z_2)}{z_2 - z_1}$$

78. Usar el ejercicio (77) para calcular las integrales:
- a)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\cos(z-1) dz}{(z-1)(z-2)}$ , alrededor de  $\gamma: \|z\| = 3$
- b)  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{e^z(z^2 - 1)}$ , alrededor del cuadrado cuyos vértices están en  $x = \pm 2$  y  $y = \pm 2i$
79. Hallar el valor numérico de  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z-2}$  si  $\gamma$  es:
- a) El círculo  $\|z\| = 3$  b) El círculo  $\|z\| = 1$
80. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz$ , si  $\gamma: \|z\| = 5$
81. Hallar el valor numérico de  $\oint_{\gamma} \frac{e^{iz} dz}{z - \pi i}$  si  $\gamma$  es:
- a) El círculo  $\|z - 1\| = 4$  b) La elipse  $\|z - 2\| = \|z + 2\| = 6$
82. Hallar el valor numérico de  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$  alrededor de un triángulo con vértices en:
- a)  $2 \pm i, -2 \pm i$  b)  $-i, 2 - i, 2 + i, i$
83. Demostrar que:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \operatorname{sen} t$  si  $t > 0$  y  $\gamma$  es el círculo  $\|z\| = 2$
84. Hallar el valor numérico de  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{zt}}{(z^2 + 1)^2} dz$ , si  $t > 0$  y  $\gamma$  es el círculo  $\|z\| = 3$
85. Probar que:  $f'(a) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^4}$  si  $\gamma$  es una curva simple cerrada alrededor de  $\|z\| = a$  y  $f(z)$  es analítica en el interior y sobre  $\gamma$ .

86. Evalúe la integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ , mediante la descomposición del integrando en fracciones parciales:
- a) Si  $a$  y  $b$  están en el interior de  $\gamma$ .
- b) Si  $a$  está en el interior de  $\gamma$  y  $b$  en el exterior.
- c) Si  $b$  está en el interior de  $\gamma$  y  $a$  en el exterior.
87. Sea  $\gamma: z(t) = 2e^{it} + 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Evalúe las integrales:
- a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z} dz$  b)  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z-1} dz$  c)  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + 1} dz$  d)  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - z} dz$
- e)  $\oint_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2} dz$  f)  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-1)^2} dz$  g)  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 + 1)^2} dz$  h)  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^3} dz$
88. Calcule  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{x} dx$ , con  $a$  entero positivo ahora, muestre que

94. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 - \cos 3z}{(z-4)^4} dz$ , si  $\gamma$  es el triángulo con vértices  $0, -1 - 8i, 1 - 8i$ .
95. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{senh}(z^4) dz}{(z+1)^2}$  si  $\gamma: \|z - 1 + 2i\| = 1$
96. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{(z-i)^4} dz$ ,  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple que encierra a  $-i$ .
97. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{2z \cosh z}{(z-2+4i)^2} dz$ ,  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple que no pasa por  $2-4i$ .
98. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{(z+i)^2 dz}{(z+3-2i)^3}$ ,  $\gamma$  es la circunferencia  $\|z+2\| = 5$
99. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{-(2+i)\operatorname{sen} z^2}{(z+4)^2} dz$ ,  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple que encierra a  $-4$ .
100. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{3z^2 \cosh(z) dz}{(z+2i)^3}$ ,  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple que encierra a  $-2i$ .

101. Si  $\gamma$  es el rectángulo  $x = \pm 4$ ,  $y = \pm 4$ , descrito en dirección positiva, calcular las integrales:
- a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$       b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh(2z) dz}{(z - \frac{\pi}{4})^3}$
102. Verificar el teorema de Cauchy para la función  $f(z) = z^2 - iz^2 - 5z + 2i$  si  $\gamma$  es la elipse  $\|z - 3i\| + \|z + 3i\| = 9$ .
103. Demuestre que  $\oint_{\gamma} \cos z dz = 2\pi i$ , donde  $\gamma$  es la circunferencia unitaria alrededor del origen.
104. Si  $\gamma$  es una circunferencia unitaria en el sentido negativo, con centro en  $z = 0$ , demuestre que:  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh(z)}{z^2} dz = -2\pi i$ .

105. Si  $\gamma$  es una circunferencia unitaria en el sentido positivo, con centro en  $z = 0$ , demuestre que:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\cosh(z) dz}{z^{n+1}} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n!}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
106. Si  $\gamma$  es una circunferencia unitaria alrededor del origen en el sentido positivo, calcular:
- a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^{1/z} dz}{z^{n+1}}$       b)  $\oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)}$ ,  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$ ,  $a \neq b$
107. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{z dz}{z^2 - 1}$ , donde  $\gamma: |z - a| = a$ ,  $a > 1$ .
108. Calcule la integral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$ , donde el contorno  $\gamma$  contiene en su interior el círculo  $\|z\| \leq a$ .
109. Calcule la integral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{ze^z dz}{(z-a)^2}$ , si el punto  $a$  se encuentra dentro del contorno  $\gamma$ .
110. Calcular la integral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^2}$ , si:
- a) El punto "0" se encuentra dentro y el punto 1 fuera del contorno  $\gamma$ .
- b) El punto 1 se encuentra dentro y el punto 0 fuera del contorno  $\gamma$ .
- c) Los puntos 0 y 1 se encuentran ambos dentro del contorno  $\gamma$ .
111. Probar que si  $\gamma$  es el contorno del triángulo con vértices en los puntos 0, 3i y -4i, con orientación positiva, entonces  $\|\oint_{\gamma} (e^z - z) dz\| \leq 60$ .
112. Sea  $\gamma$  el arco del círculo  $\|z\| = 2$  que va de  $z = 2$  a  $z = 2i$  en el primer cuadrante, sin calcular la integral, probar que:  $\|\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1}\| \leq \frac{\pi}{3}$ .

## CAPÍTULO VI

### 6. SUCESIONES Y SERIES INFINITAS COMPLEJAS.-

El presente capítulo estará orientado principalmente a las representaciones de las funciones analíticas por series, y para garantizar la existencia de tales representaciones haremos el estudio de las sucesiones y series infinitas de números complejos.

#### 6.1. DEFINICIÓN DE SUCESIÓN COMPLEJA.-

113. Sea  $\gamma$  el segmento recto que va de  $z = i$  a  $z = 1$ , teniendo en cuenta que el punto más próximo al origen, de entre los de ese segmento, es su punto medio, demostrar que:  $\|\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}\| \leq 4\sqrt{2}$ , sin calcular la integral.
114. Sea  $\gamma$  el semicírculo superior de centro en "0" y radio  $R > 1$ ,  $a > 0$ , si  $I_a = \int_{\gamma} \frac{e^{-az}}{z^{n+1}} dz$ , calcular  $k$  tal que  $\|I_a\| \leq k$ .
115. Si  $n$  es un entero positivo, probar que:  $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} (\cos(n\theta) - \sin(n\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}$ .
116. Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} e^z dz$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$  y deducir las integrales  $\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta$ ,  $\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta) d\theta$ .
117. Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z - 0)^{n+1}}$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$  y deducir las integrales:  $\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} (\cos(n\theta) - \sin(n\theta)) d\theta$ ,  $\int_0^{2\pi} e^{a \cos \theta} \sin(n\theta) (\cos \theta - \sin \theta) d\theta$ .
118. Probar que  $\|\int_{\gamma} \frac{z dz}{z^2 + 1}\| \leq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$ , donde  $\gamma$  es el semicírculo en sentido superior  $\|z\| = 3$ .

#### 6.2. DEFINICIÓN.-

El recorrido  $R$  de una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de los distintos valores de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### 6.3. DEFINICIÓN.-

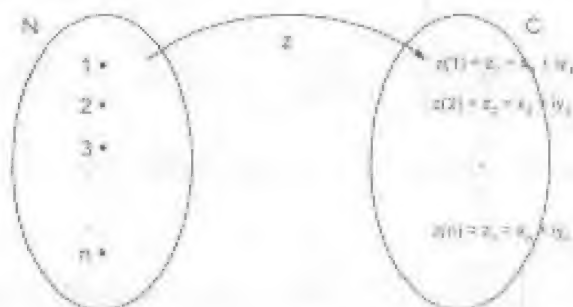
Una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada si y sólo si su recorrido es acotado; es decir, los términos de la sucesión se encuentran contenidos en una bola cerrada como  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números  $\mathbb{C}$  acotada, se tiene que  $\exists C \in \mathbb{R} : C > 0 / \|z_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$ .

#### 6.4. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene límite al número  $x_0$ , si y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$ ,



Una sucesión infinita de números complejos, es una función compleja  $z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , con dominio en  $\mathbb{N}$  y rango en  $\mathbb{C}$ , tal que:  $z(n) = z_n = x_n + iy_n$ , en donde  $z_n$  es el término  $n$ -ésimo de la sucesión.



**NOTACIÓN.** A la sucesión compleja infinita  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , denotaremos por  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $z_n \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , donde " $z_n$ " se llama  $n$ -ésimo término de la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o término general.

**Ejemplo.** Si  $z$  es una función definida por  $z(n) = i^n$ , luego  $z(n)$  es la sucesión  $\{i^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{i, -1, -i, 1, \dots\}$ .

**Ejemplo.** A la sucesión compleja

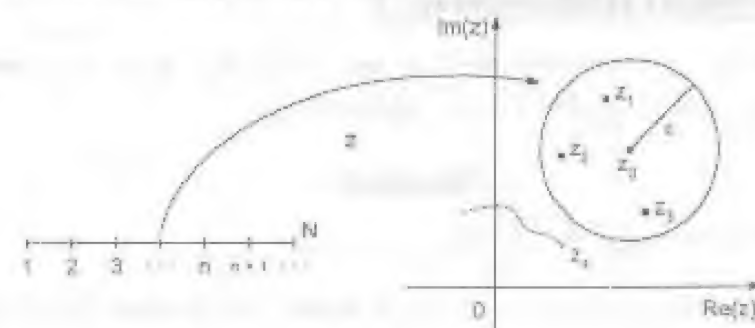
$$1 + i, \frac{1}{2^2} + \frac{i}{2^2}, \frac{1}{3^2} + \frac{i}{3^2}, \dots, \text{ denotaremos por } \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

existe un número  $N > 0$ , tal que  $\forall n \in \mathbb{N}$  se tiene  $\|z_n - z_0\| < \varepsilon$ .

**EN FORMA SIMBÓLICA.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \text{ si } n > N \Rightarrow \|z_n - z_0\| < \varepsilon$$

**NOTACIÓN.**  $d(z_n, z_0) = \|z_n - z_0\| < \varepsilon$



**Ejemplo.** Probar que:  $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Desarrollo**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \text{ si } n > N \Rightarrow \left\| \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right\| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\left\| \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} - 0 \right\| = \left\| \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right\| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$$

$$\text{de donde } n > \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}} = N$$

$$\text{Luego } \forall \varepsilon > 0, \exists N = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}} / \left\| \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} - 0 \right\| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\text{Es decir: } \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## 6.5. DEFINICIÓN.

Sea  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , se dice que la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ,  $z_n = x_n + iy_n = \text{Re}(z_n) + i \text{Im}(z_n)$  es convergente si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  no existe, se dice que la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es divergente.

## 6.6. TEOREMA FUNDAMENTAL.

Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$  tal que  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(z_n) = x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(z_n) = y_0$$

**Demostración**

$$\Rightarrow \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 = x_0 + iy_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tal que: } \forall n \geq N \text{ se tiene } \|z_n - z_0\| < \varepsilon$$

$$\|x_n + iy_n - x_0 - iy_0\| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\|(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)\| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\|x_n - x_0\| = \sqrt{(x_n - x_0)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \|x_n - x_0\| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

$$\|y_n - y_0\| < \varepsilon, \forall n \geq N, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \text{ o sea}$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$$

$$\Leftarrow \text{ Si } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \text{ [por hipótesis]}$$

probar que  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 = x_0 + iy_0$ . En efecto:

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0 / \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall n \geq N_1$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0 / \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \forall n \geq N_2$$

$$\text{Entonces: } \begin{cases} (x_n - x_0)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \\ (y_n - y_0)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \end{cases} \Rightarrow (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow \|(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|(x_n + iy_n) - (x_0 + iy_0)\| < \varepsilon, \text{ entonces } \|z_n - z_0\| < \varepsilon$$

$$\text{es decir } \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \|z_n - z_0\| < \varepsilon, \forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\text{entonces } \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 = x_0 + iy_0 \text{ o sea que: } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0$$

**OBSERVACIÓN.** Si  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$  (no converge o no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ), entonces se dice que la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es divergente.

**Ejemplo.** Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{\sqrt[n]{a^n + b^n} + \ln(\sqrt{2} - 1)\}$  donde  $0 < b \leq a$

**Desarrollo**

## 6.9. DEFINICIÓN.

Decimos que la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es oscilante si ni converge ni diverge a infinito.

**Ejemplo.** La sucesión  $\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$  es oscilante.

Sea  $\{x_n\}_{n \geq 1} = \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\}_{n \geq 1}$  y  $\{y_n\}_{n \geq 1} = \{n\sqrt[2]{2} - 1\}_{n \geq 1}$ .

Como  $0 < b \leq a \Rightarrow 0 < b^n \leq a^n \Rightarrow a^n \leq a^n + b^n \leq 2a^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$a \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[2]{2}a$ , entonces tomando límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{2}a \Rightarrow a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[2]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2]{2} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$$

$$\text{Luego } \{\sqrt[n]{a^n + b^n} + in(\sqrt[2]{2} - 1)\}_{n \geq 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + i \ln 2$$

## 6.7. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión compleja  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists N > 0$ , tal que  $\|z_n - z_m\| < \varepsilon, \forall n > N, m > N$

## 6.8. DEFINICIÓN.-

Diremos que la sucesión  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  diverge a infinito ( $\{z_n\}_{n \geq 1} \rightarrow \infty$ ) si  $\forall M > 0, \exists N > 0$

tal que  $\|z_n\| > M, \forall n > N$

**Ejemplo.-** La sucesión  $\{1 + ni\}$  diverge a más infinito  $1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, \dots, 1 + ni, \dots$

## 6.10. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES COMPLEJAS.-

Supongamos que  $z_n \rightarrow l$  y  $w_n \rightarrow k$ , entonces:

$$\textcircled{1} \quad z_n + w_n \rightarrow l + k$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha z_n \rightarrow \alpha l$$

$$\textcircled{3} \quad z_n w_n \rightarrow l k$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{l}{k} \text{ siempre que } w_n \neq 0 \text{ y } z_n \rightarrow l$$

## 6.11. TEOREMA.-

Una sucesión compleja converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

### Demostración

Se entiende que el estudiante está familiarizado con el criterio de la convergencia de Cauchy para sucesiones reales.

Supongamos que  $z_n \rightarrow L$ , para algún  $N, \|z_n - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si  $n \geq N$ , entonces, para  $n \geq N$  y  $m \geq N$  tenemos:

$$\|z_n - z_m\| = \|(z_n - L) - (z_m - L)\| \leq \|z_n - L\| + \|z_m - L\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy, reciprocamente

Supongamos que  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy, por probar que  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  es convergente.

Sea  $z_n = x_n + iy_n$ , para algún  $N, \|z_n - z_m\| < \varepsilon$

Si  $n \geq N, m \geq N$  como  $\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\|$

$\{x_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy real por lo tanto converge a algún número real  $x$ , en forma similar para  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy real y también converge a algún número real  $y$  entonces  $z_n \rightarrow a + ib$ .

## 6.12. SERIES INFINITAS DE NÚMEROS COMPLEJOS.-

**DEFINICIÓN.-** Sea  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de números complejos, a la expresión siguiente  $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$ , llamaremos serie infinita de números complejos y que denotaremos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \dots (1)$$

donde los  $z_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , se denominan términos de la serie infinita.

Ahora formaremos una sucesión a partir de la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

Luego a la sucesión así definida  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  se denomina sucesión de las sumas parciales de la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Si la sucesión  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  es convergente o sea que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Si la sucesión  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  es divergente, o sea que  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es

divergente y por lo tanto carece de suma como  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{k=1}^{\infty} z_k = S_n + R_n$

A la expresión  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$  se conoce con el nombre de Residuo de la

serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ .

## 6.13. TEOREMA.-

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$  es convergente, si y sólo si  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  son

convergentes y si  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S_1$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = S_2$ , entonces:  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + iS_2 = S$

### Demostración

Sea  $\{S'_n\}_{n \geq 1}$ , la sucesión de sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , es decir:

$$S'_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = x_n + iy_n \quad \dots (1)$$

$$\text{donde } x_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad y_n = \sum_{k=1}^n y_k \quad \dots (2)$$

entonces tenemos que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S$  y de la parte (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = S_2 \quad \dots (3)$$

Luego de (1) implica a (3), por lo tanto:  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S_1 + iS_2 = S$



recíprocamente como  $x_N = \sum_{k=1}^N x_k$  y  $y_N = \sum_{k=1}^N y_k$  son las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  entonces  $S_N = x_N + iy_N$ , entonces  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N + i \lim_{N \rightarrow \infty} y_N$ , de donde  $S = S_1 + iS_2$  entonces  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  es convergente y por lo tanto la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente.

#### 6.14. TEOREMA.-

Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge si y sólo si para todo número positivo  $\varepsilon$ , existe un entero positivo  $N > 0$ , tal que  $\|S_{m+p} - S_m\| = \|S_{m+1} + S_{m+2} + \dots + S_{m+p}\| < \varepsilon \quad \forall m > 0$  y  $\forall$  entero  $P > 0$ .

##### Demostración

Sea  $S_N = \sum_{k=1}^N z_k$ , la  $n$ -ésima suma parcial de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , entonces por la condición de Cauchy, la sucesión  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  de las sumas parciales converge a un límite  $S$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \|S_n - S_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N$

En forma equivalente para  $\|S_{m+p} - S_m\| < \varepsilon, \quad \forall m > N, \quad \forall$  entero  $P > 0$

Ahora  $S_{m+p} = \sum_{k=1}^{m+p} z_k$  y  $S_m = \sum_{k=1}^m z_k$ , de donde

$$S_{m+p} - S_m = \sum_{k=1}^{m+p} z_k - \sum_{k=1}^m z_k = \sum_{k=m+1}^{m+p} z_k = S_{m,p}$$

En consecuencia, la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la suma parcial de  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  y por lo tanto la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es  $\|S_{m,p}\| < \varepsilon, \quad \forall m > N$  y  $\forall$  entero  $P > 0$ .

#### 6.15. PROPIEDADES DE LAS SERIES COMPLEJAS.-

- ① Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$
- ② Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} kz_n$  es convergente
- ③ Si las series  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  son convergentes, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm z_n)$  es convergente.

##### Demostración

- ① En caso particular del teorema anterior haciendo  $k = 1$
- ② Si  $k = 0$ , es trivial, por las sumas parciales  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  son todos

ceros, por consiguiente  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge a  $k = 0$

Supongamos que  $k \neq 0$ , entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ , tal que  $\|\sum_{n=1}^N z_n - I\| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ ,

$\forall n > N$ , esto es:  $\|\sum_{n=1}^n kz_n - kI\| \leq |k| \|\sum_{n=1}^n z_n - I\| \leq |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon, \quad \forall n > N$ , por

consiguiente  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge a  $kI$ .

- ③  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$ , tal que:

$$\|\sum_{n=1}^n z_n - I\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1 \quad \text{y} \quad \|\sum_{n=1}^n z_n - I'\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2$$

Si  $N = \max\{N_1, N_2\}$  entonces  $\forall n > N$

$$\|\sum_{k=1}^n (z_k \pm z_k) - (I \pm I')\| \leq \|\sum_{k=1}^n z_k - I\| + \|\sum_{k=1}^n z_k - I'\|$$

$$\leq \|\sum_{k=1}^n z_k - I\| + \|\sum_{k=1}^n z_k - I'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm z_n)$  es convergente a  $I \pm I'$

#### 6.16. DEFINICIÓN.-

Diremos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es absolutamente convergente si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  es convergente.

**Ejemplo.-** Determinar si las siguientes series dadas son absolutamente convergentes

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

##### Desarrollo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{e^{in}}{n^2} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n}}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ es la serie } \cdot P = 2 > 1 \text{ es convergente, por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

es absolutamente convergente.

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos n}$$

##### Desarrollo

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{2}}}, \text{ es convergente.}$$

Por lo tanto la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos n}$  es absolutamente convergente

#### 6.17. DEFINICIÓN.-

Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  no es convergente para  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente, entonces se dice

que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es condicionalmente convergente.

#### 6.18. SERIES ESPECIALES.-

Las series especiales sirven para comprobar la convergencia absoluta y son las siguientes:

- ① **LA SERIE GEOMÉTRICA.-** La serie geométrica es de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z^0 + z^1 + z^2 + \dots + z^n + \dots$  y es absolutamente convergente si  $\|z\| < 1$  y diverge si  $\|z\| \geq 1$ .

##### Demostración

La condición necesaria para que cualquier serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converja es que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

Si  $\|z\| \geq 1$ , la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  es divergente.

Si  $\|z\| < 1$ , la serie converge a cero.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos(n)} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(1+i)^n\|}{2^{\frac{n}{2}} \|\cos(n)\|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \left\| \frac{e^{i(n\pi/4)} + e^{-i(n\pi/4)}}{2} \right\|}$$

Si  $0 < \|z\| < 1$ , de la identidad se tiene:

$$(1 - \|z\|)(\|z\|^{n+1} + \|z\|^{n+2} + \dots + \|z\|^{n+p}) = \|z\|^{n+1}(1 - \|z\|^p)$$

$$< 1 + \left(\frac{2}{2^p}\right) + \left(\frac{4}{4^p}\right) + \dots + \left(\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p}\right)$$

La última serie es una serie geométrica finita de términos finitos donde el primer término es 1 y la razón es  $\frac{1}{2^{p-1}}$ , entonces

$$S_{2^{p-1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{1}{1 - 2^{1-p}}, \quad \forall n > 0.$$

Como la serie es una serie de términos positivos  $S_n < S_m$ , si  $n < m$ , como  $n \leq 2^{p-1}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$S_n \leq S_{2^{p-1}} < \frac{1}{1 - 2^{1-p-1}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}, \quad \forall n$$

para  $p > 1$ ,  $2^{p-1} > 1$  y por lo tanto  $2^{p-1} - 1 > 0$ , entonces  $\frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} = M$ , que no depende de  $n$  y por lo tanto,  $\|S_n\| = S_n \leq M$ ,  $\forall n$

Luego la sucesión  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , de sumas parciales es una sucesión creciente y acotada de números reales y por consiguiente convergente, es decir que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente si  $p > 1$ , y la serie converge absolutamente por que

cada términos es positivo

$$\|z_{n+1}\| + \|z_{n+2}\| + \dots + \|z_{n+p}\| < \epsilon, \quad \forall n \geq N \text{ y } p > 0$$

$$\|S_{n+p}\| = \|z_{n+1}\| + \|z_{n+2}\| + \dots + \|z_{n+p}\| < \epsilon \quad \text{por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ es divergente}$$

## 6.28. CRITERIOS DE CONVERGENCIA.-

### ① CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA CONVERGENCIA ABSOLUTA.-

Si la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  es absolutamente convergente y  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es una serie infinita, tal que  $k > 0$  fijo,  $\|z_n\| < k \|w_n\|$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es también absolutamente convergente.

#### Demostración

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p > 0$  se tiene

$$\|z_{n+1}\| + \|z_{n+2}\| + \dots + \|z_{n+p}\| \leq k(\|w_{n+1}\| + \|w_{n+2}\| + \dots + \|w_{n+p}\|)$$

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , arbitrariamente pequeño,  $\exists N > 0$ , tal que  $\forall n \geq N$  y  $\forall p > 0$ ,

$$\|w_{n+1}\| + \|w_{n+2}\| + \dots + \|w_{n+p}\| < \frac{\epsilon}{k},$$

Por lo tanto  $\|z_{n+1}\| + \|z_{n+2}\| + \dots + \|z_{n+p}\| < \epsilon$ ,  $\forall n \geq N$  y  $p > 0$



Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es absolutamente convergente, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente.

**Demostración**

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es absolutamente convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  es convergente. entonces,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$  tal que  $\forall n > N$  y  $P > 0$ , se tiene:

**Demostración**

Se debe probar que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = L < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es convergente.

Sea  $N > 0$ , suficientemente grande tal que:

$\forall n \geq N$ ,  $\left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| \leq r$  donde  $L < r < 1$  entonces:

$$\|u_{n+1}\| \leq r \|u_n\|$$

$$\|u_{n+2}\| \leq r \|u_{n+1}\| \leq r^2 \|u_n\|$$

$$\|u_{n+k}\| \leq r \|u_{n+1}\| \leq r^3 \|u_n\|$$

$$\|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + \|u_{n+3}\| + \dots \leq \|u_n\| (r + r^2 + r^3 + \dots)$$

Luego por el criterio de comparación,  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$  es convergente para  $0 < r < 1$ , luego

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es absolutamente convergente.

**6.21. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-**

3) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , donde  $z_n = \frac{n^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$

**Desarrollo**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}, \text{ dividiendo entre } n^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{i}{n} + \frac{1-3i}{n^2}}{(2 + \frac{4i-3}{n})(1 - \frac{i}{n})} = \frac{1-0+0}{(2+0)(1-0)} = \frac{1}{2} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) + \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{n+1}{4^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left( \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) + \frac{n+1}{4^{n-1}} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left( \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) + \frac{n+1}{4^{n-1}} \right] = \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left( \frac{1-0}{\frac{3}{4}} \right) + 0 \right]$$

$$= \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right] = \frac{4}{3} \left[ \frac{7}{12} \right] = \frac{7}{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{9} \quad \dots (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n-3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{aplicando el teorema de Sándwich}$$

En consecuencia la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es absolutamente convergente

**② CRITERIO DE LA RAZÓN DE D'ALAMBERT DE CONVERGENCIA ABSOLUTA.-**

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = L$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge absolutamente si  $L < 1$  y diverge si  $L > 1$ .

2) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , donde  $z_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i})$

**Desarrollo**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}), \text{ racionalizando}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i\sqrt{n}}{\sqrt{n+2i} + \sqrt{n+i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{\sqrt{1+\frac{2i}{n}} + \sqrt{1+\frac{i}{n}}} = \frac{i}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{i}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{i}{2}$$

3) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n)$  donde  $a_n = 2(\frac{1}{4})^1 + 3(\frac{1}{4})^2 + \dots + (n+1)(\frac{1}{4})^n$  y

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

**Desarrollo**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \dots (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$$

$$a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{4} a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$a_n - \frac{1}{4} a_n = \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} - \frac{n+1}{4^{n+1}}$$

$$\frac{3}{4} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{n+1}{4^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{4}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) - \frac{n+1}{4^{n-1}} \right]$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \text{ tomando límite}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad \dots (3)$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{7}{9} + i$

4) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n)$ , donde

$$a_n = \frac{1}{n^2} [e^{-\frac{1}{n^2}} + 2e^{-\frac{2}{n^2}} + 3e^{-\frac{3}{n^2}} + \dots + ne^{-\frac{n}{n^2}}] \text{ y } b_n = \frac{1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n}{n^{n+1}}$$

**Desarrollo**

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6} + \dots + \frac{1}{n^{2n-2}} - \frac{1}{n^{2n}}$$







$$\Rightarrow \|w_n - w\| < \|w_n - z\| + r < 2r$$

$$\|w_n - w\| < r \Rightarrow w_n \in B_r(z)$$

18. Estudiar la convergencia de la serie:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n}$

#### Desarrollo

Analizando primero la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n} \right\|$

Aplicando el criterio de comparación, es decir:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n} \right\| &\leq \frac{|n| + |\operatorname{sen}^2 n|}{\|ie^n + (2-i)n\|} \leq \frac{n+1}{\|ie^n\| - \|(2-i)n\|} \\ &\leq \frac{n+1}{e^n - \sqrt{5}n} \leq \frac{n+1}{e^n - 3n} \leq \frac{2(n+1)}{e^n} \leq \frac{4n}{e^n} \end{aligned}$$

(puesto que  $|\operatorname{sen} n| < 1 \Rightarrow |\operatorname{sen}^2 n| < 1$ )

$$\left\| \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n} \right\| \leq \frac{4n}{e^n}$$

(se sabe que  $n \leq \frac{1}{6}e^n$ ,  $\forall n \geq 3 \Rightarrow -3n \geq -\frac{e^n}{2} \Rightarrow e^n - 3n \geq e^n - \frac{e^n}{2} = \frac{e^n}{2}$ , de donde  $e^n - 3n \geq \frac{e^n}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^n - 3n} \leq \frac{2}{e^n}$ )

consideremos la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{e^n}$ , aplicando criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \text{ se tiene que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{e^n} \text{ es convergente.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \operatorname{sen}^2 n}{ie^n + (2-i)n} \text{ es convergente absolutamente.}$$

19. Determinar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$  es absolutamente convergente.

#### Desarrollo

Aplicando criterio de la razón se tiene:  $u_n = \frac{(3+7i)^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(3+7i)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(3+7i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3+7i)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n(3+7i)^{n+1}}{(n+1)(3+7i)^n} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{3+7i}{n+1} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+49}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{58}}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

como  $L < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$  es absolutamente convergente.

20. Determinar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}i\right)^n$  es absolutamente convergente.

#### Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón:  $u_n = n\left(\frac{1}{2}i\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{2}i\right)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \left\| \frac{1}{2}i \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

como  $L < 1$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}i\right)^n$  es absolutamente convergente.



- 21) Determinar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$  es absolutamente convergente.

**Desarrollo**

Aplicando el criterio de la razón:  $u_n = \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+2)(2+i)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(n+2)(2+i)^{n+1}}{(n+1)(2+i)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(n+2)(2+i)^{n+1}}{(n+1)(n+1)!(2+i)^n} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} \|2+i\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}(n+2)}{(n+1)^2} = 0 < 1$$

como  $L < 1$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$  es absolutamente convergente.

- 22) Determinar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} e^{n(\frac{1}{2}-1)}$  es absolutamente convergente.

**Desarrollo**

Aplicando el criterio de la razón:  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} e^{n(\frac{1}{2}-1)} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2} e^{(n+1)(\frac{1}{2}-1)}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2} e^{(n+1)(\frac{1}{2}-1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} e^{n(\frac{1}{2}-1)}} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \|e^{\frac{1}{2}-1}\| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0 < 1$$

como  $L < 1$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} e^{n(\frac{1}{2}-1)}$  es absolutamente convergente.

- 23) Determinar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)}$  es absolutamente convergente.

**Desarrollo**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)} = (8+i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ es convergente}$$

como  $a_n \leq b_n$  donde  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es divergente entonces por el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(8+i)}{(n+1)(n+2)} \text{ es divergente.}$$

- 24) Estudiar la convergencia o divergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{2^n} + i \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \right]$  si es convergente calcular su suma.

**Desarrollo**

Estudiar la convergencia o divergencia de la serie compleja

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{2^n} + i \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \right]$  es equivalente estudiar la convergencia o divergencia de las

$$\text{series } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  aplicamos el criterio de la raíz

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{1/n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

como  $L < 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  es convergente

ahora calculamos la suma de la serie para esto usamos la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \text{ derivando } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ para } x = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \text{ de donde } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

ahora estudiaremos a la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$ , aplicamos el criterio de comparación

$$\text{directa } a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \leq \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{n^2} = b_n$$

donde  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  es convergente

como  $a_n \leq b_n$  donde  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es convergente entonces por el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \text{ es convergente.}$$

Ahora calculamos la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2)]$$

$$a_1 = 2\ln 4 - \ln 3 - \ln 5$$

$$a_4 = 2\ln 5 - \ln 4 - \ln 6$$

$$a_{n-2} = 2\ln(n-1) - \ln(n-2) - \ln(n)$$

$$a_{n-1} = 2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1)$$

$$a_n = 2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2)$$

sumando

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

$$S_n = \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln(2) + 0 = \ln 2$$

$$\text{entonces } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{2^n} + i \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \right] = 2 + i \ln 2$$

- 25) Analizar la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n e^{in}}{n^2} \cos(n^2 + 4n + 5)$

**Desarrollo**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{i^n e^{in}}{n^2} \cos(n^2 + 4n + 5) \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\cos(n^2 + 4n + 5)|$$

$$a_n = 2 \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$$

$$a_1 = 2 \ln 2 - \ln 1 - \ln 3$$

$$a_2 = 2 \ln 3 - \ln 2 - \ln 4$$

Luego por el criterio de comparación directa, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{n^2} \cos(n^2 + 4n + 5)}{n^2} \right|$  es convergente.

Por lo tanto la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2} \cos(n^2 + 4n + 5)}{n^2}$  es absolutamente convergente.

## 6.22. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Estudiar la convergencia o divergencia de las sucesiones

a)  $\left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

b)  $\left\{ \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

2. Analizar la sucesión  $\left\{ \frac{\ln(n^2 + 1)}{n} + i \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

3. Analizar la sucesión  $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{n^2 + 3n^2}{n^3 + 1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

4. Analizar la sucesión  $\left\{ \frac{10^{n+1} + 11^{n+1}}{10^n + 11^n} + i n^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

5. Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $z_n = (\sqrt{n} + 1 - \sqrt{n+1})^{2n} + i \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}$

6. Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $z_n = n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} + i n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

7. Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $z_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right\} + i \left\{ (3-2\sqrt{2})^n \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \right\}$

c)  $a_n = \frac{n^5}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^2+2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2}$ ;  $b_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right)$

16. Analizar la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(3-4i)^n}{n!} \right\}$

17. Analizar la convergencia de las series siguientes:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(in)^n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

18. Estudiar la convergencia de las series siguientes:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\omega n}}{n}$

19. Estudiar la convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(in)}{3^n}$

20. Analice la convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} i \right)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} + \frac{1}{n} i \right)$

$a_n = \frac{1}{3} |\cos(n^2 + 4n + 5)| \leq \frac{1}{3} = b_n$  donde  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}$  es convergente por la serie  $P = \frac{3}{2} > 1$

8. Determinar si  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, para los números complejos  $z_n$  dados:

a)  $z_n = \left( \frac{1 + 2n^2}{n^2} - \frac{n-1}{n} \right)$

b)  $z_n = \left( \frac{1}{n} \right)^n + \frac{3n^2}{n^2 + 2} i$

c)  $z_n = \left( \frac{n^2}{n+1} \right) i$

d)  $z_n = \frac{1}{1 - \left( \frac{n^2 + 4}{n^2 - 3n} \right)}$

9. Una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada si existe algún número  $M$  tal que  $\|z_n\| \leq M$ , para todo  $n$  pruebe que una sucesión convergente es acotada

10. De un ejemplo en el que  $\|z_n\|_{n \in \mathbb{N}}$  converge pero  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

11. Sea  $z_1$  y  $z_2$  números complejos dados. Sea  $z_n = \frac{1}{2}(z_{n+1} + z_{n-2})$  pruebe que esta sucesión converge mostrando que es una sucesión de Cauchy, después utilice el hecho de que converge para probar que el límite es  $\frac{1}{3}(z_1 + 2z_2)$

12. Probar que la sucesión  $\{-2 + i \frac{(-1)^n}{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $-2$

13. Demuestre que las sucesiones converge y encuentre sus límites

a)  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ e^{i \frac{2}{3n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

b)  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right) \left( \frac{n-1}{n\pi} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

14. Demuestre que la sucesión  $\left\{ e^{\frac{2n(n^2-1)}{2n^2+1}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge y su límite es 1.

15. Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n + ib_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde

a)  $a_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$ ;  $b_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b)  $a_n = n - n^2 \ln(n) + \frac{1}{n}$ ;  $b_n = n(\sqrt{2} - 1)$

c)  $a_n = \frac{n^5}{n^3+1} + \frac{n^2}{n^2+2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2}$ ;  $b_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right)$

16. Analizar la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(3-4i)^n}{n!} \right\}$

17. Analizar la convergencia de las series siguientes:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(in)^n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

18. Estudiar la convergencia de las series siguientes:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\omega n}}{n}$

19. Estudiar la convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(in)}{3^n}$

20. Analice la convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} i \right)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} + \frac{1}{n} i \right)$

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+7i)^n}{n!}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(6+i)}{(n+1)(n+2)}$

24. Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n^2} e^{i \frac{n}{2} (n-1)}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{i}{2} \right)^n$

25. Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{in} \cos n^2$

26. Estudiar la convergencia o divergencia de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^n n!}{n^n} + \frac{e^n}{n!} \right)$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(n+1)2^n}{n!} + \frac{(n+3)!}{3!n!3^n} \right)$

27. Analizar la convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{e^{in}}{n^2} + i \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3} \right]$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-in}}{\sqrt{n}} + \frac{i}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \right)$



- 21) Analizar la convergencia de las series.
- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cosh(2n)$
- 22) Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1}$  converge y hallar su suma.
- 23) Determinar cual de las siguientes series son absolutamente convergente.

## CAPÍTULO VII

### 7. SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT.

#### 7.1. SERIES DE POTENCIAS.-

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots \quad (1)$$

donde  $c_n$  son constantes reales y complejas llamados coeficientes " $z_0$ " es constante y se llama centro de la serie, " $z$ " es la variable compleja.

Si  $z_0 = 0$ , la serie (1) se reduce a la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$  serie de potencias en  $z$ .

#### OBSERVACIÓN.-

- 1) Diremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  es absolutamente convergente,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z - z_0\| < R$  y es divergente,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\|z - z_0\| > R$ .
- 2) Si  $\exists R > 0$ , tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  converge absolutamente en  $\|z - z_0\| < R$  y si  $0 < \rho < R$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  converge uniformemente en  $\|z - z_0\| < \rho$ .
- 3) La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  converge absolutamente  $\forall z \in \mathbb{C}$  (en particular en  $z = z_0$ ), tal que  $\|z - z_0\| < R$  y si  $0 < \rho < R$ , entonces la serie converge uniformemente,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $0 < \|z - z_0\| < \rho$ .

Ejemplos.- Determinar la región de convergencia de las siguientes series:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n$

#### Desarrollo

Sea  $u_n = \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+2}{n} (z-2i)^{n+1}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{n+2}{n} (z-2i)^{n+1}}{\frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} (z-2i) \right\| = \|z-2i\| < 1$$

$$\|z-2i\| = \|x + (y-2i)i\| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} < 1$$

28) Analizar la convergencia de las series.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} \right)$

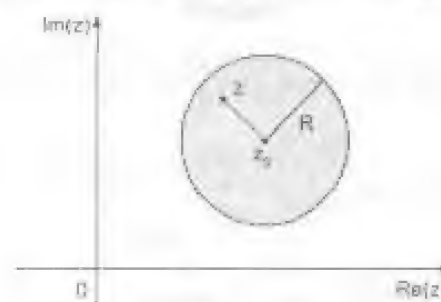
b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n^n + 1)^n + i n \left( \frac{2}{3} \right)^n \right]$

29) Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{8^{n+1} n!} + \frac{i}{n!} \right]$  es convergente calcular su suma.

30) Si la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{n-1}{2^{n+1}} + i \ln \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) \right]$  es convergente, calcular su suma.

4) Al número  $R > 0$ , se llama radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

5) Para  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene  $\|z - z_0\| < R$ , que se denomina región de convergencia.



6) Para hallar el radio y región de la convergencia de una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , se utiliza el criterio de la razón, que está caracterizada por el siguiente teorema

#### 7.2. TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  una serie de potencia en  $\mathbb{C}$  y sea  $u_n = c_n (z - z_0)^n$ , tal que

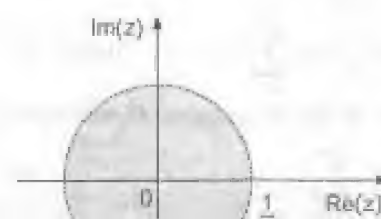
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = L, \text{ entonces:}$$

- i) Si  $L < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  converge absolutamente.
- ii) Si  $L > 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  diverge.
- iii) Si  $L = 1$ , el criterio no decide.

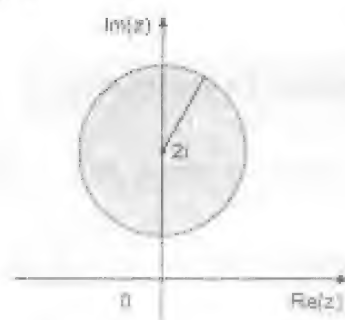
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{(-1)^{n+1} (2n+2)!}{((n+1)!)^2} z^{n+1}}{\frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} z^n} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{((n+1)!)^2 (2n)!} \|z\| = \|z\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$= 4 \|z\| < 1 \text{ de donde } \|z\| < \frac{1}{4}$$



$$\Delta: x^2 + (y-2)^2 = 1$$



$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} z^n$$

Desarrollo

$$\text{Sea } u_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} z^n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (2n+2)!}{((n+1)!)^2} z^{n+1}$$

i) Si  $L = 0$ , entonces  $R = \infty$ .

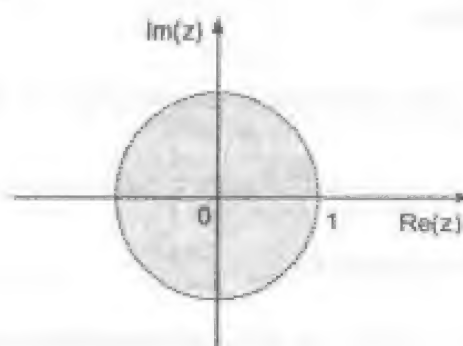
ii) Si  $L > 0$ , entonces  $R = \frac{1}{L}$ .

iii) Si  $L = \infty$ , entonces  $R = 0$ .

### 7.3. FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.

La serie de potencia  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ , con radio de convergencia  $R > 0$ , define una función de  $z$ , es decir:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ , donde  $D_f = \{z \in \mathbb{C} / \|z-z_0\| < R\}$  es decir que el dominio de  $f(z)$  es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideremos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\dots+z^n+\dots$  convergente,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < R$ .

Donde  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{1} \right\| = 1$  es decir la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  es convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < 1$ .



Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  define a la función  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

### OBSERVACIONES

① Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  una serie de potencia tal que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = L$ , entonces:

i) Si  $L = 0$ , entonces ( $R = \infty$ ); la serie es convergente en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

ii) Si  $L > 0$ , entonces  $R = \frac{1}{L}$ .

iii) Si  $L = \infty$ , entonces ( $R = 0$ ) converge solamente en el origen.

② Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  una serie de potencia tal que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right\| = L$ , entonces:

### Serie de Potencias, De Taylor y De Laurent

329

**OBSERVACIÓN.** Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ , entonces se dice que  $f(z)$  es representada mediante la serie de potencia o se dice que  $f(z)$  está desarrollado mediante una serie de potencia.

Ejemplo.

①  $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ , converge  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < R$ ,

donde  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\|$  entonces  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right\| = 1$ .

②  $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ , converge  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < R$ .

### 7.4. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$  una serie de potencia convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z-z_0\| < R$ ,  $R > 0$  entonces:

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}$ , converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\|z-z_0\| < R'$  donde

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\|$ , entonces se tiene,

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto  $R = R'$ .

$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z-z_0)^{n-2}$ , converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\|z-z_0\| < R''$ , de donde

### Serie de Potencias, De Taylor y De Laurent

331

$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n (z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f^{(k)}(z) = 1, 2, 3, \dots, k c_k$  de donde  $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ .

$f^{(n)}(z) = \sum_{n=n}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots 2, 1 c_n (z-z_0)^{n-n} = \sum_{n=n}^{\infty} n! c_n (z-z_0)^{0-n}$  entonces

$f^{(n)}(z_0) = n! c_n$  de donde  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ .

328

### Eduardo Espinoza Ramos

$$R'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n(n-1) c_n}{n(n-1)(n-2) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto  $R = R''$ .

Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$  una serie de potencia convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que



$$\|z - z_0\| < R$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^1 (z - z_0)^n dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \text{ es convergente } \forall z \in C \text{ tal que } \|z - z_0\| < R$$

## 7.5. SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  una serie de potencias convergente  $\forall z \in C$  tal que  $\|z - z_0\| < R$ , calculando sus derivadas y evaluando en  $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = c_0 \text{ de donde } c_0 = f(z_0)$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = c_1 \text{ de donde } c_1 = f'(z_0)$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 2c_2 \text{ de donde } c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$$

como  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , desarrollando

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!} \text{ es la serie de Taylor alrededor de } z = z_0$$

cuando  $z_0 = 0$ , se tiene la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$$

que se denomina serie de MACLAURIN

## 7.6. TEOREMA.

Sea  $f(z)$  una función analítica en  $z_0$ , entonces  $f(z)$  tiene una representación en serie de

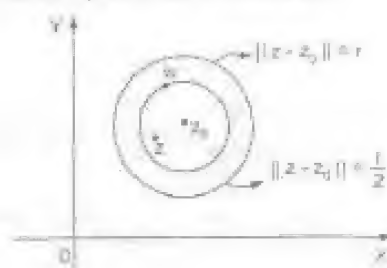
$$\text{Taylor } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}, \forall z \text{ en algún disco con centro en } z_0$$

**Demostración**

Como  $f$  es analítica  $\Rightarrow \exists$  un disco  $\|z - z_0\| < r$  en donde  $f$  es derivable, sea  $\gamma: \|z - z_0\| = \frac{r}{2}$ , entonces  $f$  es derivable en todos los puntos sobre y dentro de  $\gamma$

Sea  $w \in \gamma$  y  $z$  cualquier punto dentro de  $\gamma$ , entonces escribiremos

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \dots (1)$$



como  $w$  está más lejos a  $z_0$  que lo de  $z$ , entonces  $\|z - z_0\| < \|w - z_0\|$  por lo tanto  $\|\frac{z - z_0}{w - z_0}\| < 1$ , mediante la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (2) en (1) se tiene: } \frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

ahora por la fórmula de la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \dots (3)$$

$$\text{pero se conoce que: } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \dots (4)$$

$$\text{al reemplazar (4) en (3) se obtiene: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

que es la representación de la serie de Taylor en un disco abierto de centro  $z_0$

**Ejemplo.-** Desarrollar en serie de Taylor la función  $f(z) = \frac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ , alrededor  $z_0 = -1$  y determinar la región de convergencia.

**Desarrollo**

A la función  $f(z)$  expresaremos en una suma de fracciones

$$f(z) = \frac{2-3z}{2z^2-3z+1} = \frac{2-3z}{(2z-1)(z-1)} = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{z-1} \dots (1)$$

$$\frac{1}{2z-1} = \frac{1}{1-2z} = \frac{1}{1-2(z+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}(z+1)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2}{3}(z+1) \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} (z+1)^n$$

$$\text{si } \left\| \frac{2}{3}(z+1) \right\| < 1 \Rightarrow \|z+1\| < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+1)^n}{3^{n+1}}; \|z+1\| < \frac{3}{2} \dots (2)$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}(z+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2}(z+1) \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\text{si } \left\| \frac{1}{2}(z+1) \right\| < 1 \Rightarrow \|z+1\| < 2$$

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}; \|z+1\| < 2 \dots (3)$$

$$\text{ahora reemplazamos (2) y (3) en (1) se tiene: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+1)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z+1)^n$$

la región de convergencia es:  $\{z \in C / \|z+1\| < \frac{3}{2} \text{ o } \|z+1\| < 2\}$  es decir:

$$\{z \in C / \|z+1\| < \frac{3}{2}\}$$

## 7.8. TEOREMA.

Sea  $f(z)$  una función analítica en el anillo  $r_1 < \|z - z_0\| < r_2$ , entonces para  $z$  en este

Si  $f$  es analítica en  $z_0$ , entonces se puede desarrollar  $f$  en una serie de Taylor alrededor de  $z_0$  teniendo potencia en  $z - z_0$  ahora veremos el caso en que  $f$  no sea analítica en  $z_0$ , si aun podríamos tratar de representar en una serie alrededor de  $z_0$ .

Si incluimos potencias de  $\frac{1}{z - z_0}$ , esta es la idea detrás de la serie de Laurent.

Sea  $\gamma_1: \|z - z_0\| > r$ ,  $\gamma_2: \|z - z_0\| < R$ ,  $r < R$ .

$D = \{z \in \mathbb{C} / r < \|z - z_0\| < R\}$ , la región anular (Disco) acotada por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Sea  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , función analítica dentro y sobre la frontera de  $D$ , entonces

$w \in D$  se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie de Laurent y  $a_n = \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}$ ,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw$$

En la serie de Laurent

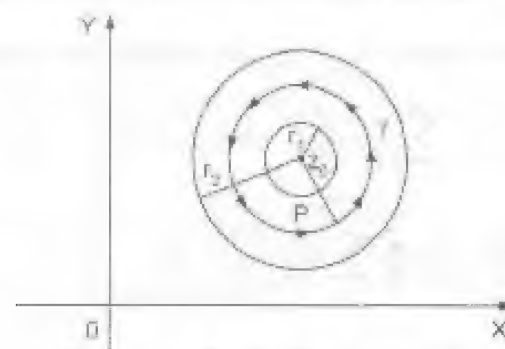
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  se llama parte analítica

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$  se llama parte principal



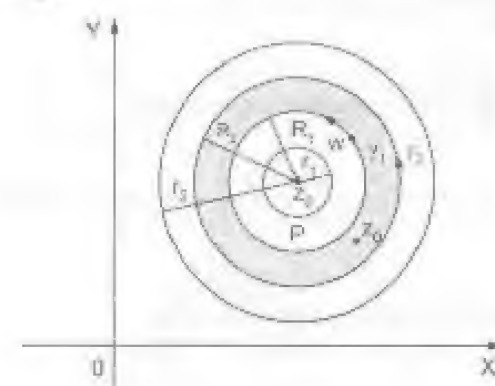
anillo  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  donde  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}$  para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

y  $\gamma$  es cualquier circunferencia  $\|z - z_0\| = \rho$ , con  $r_1 < \rho < r_2$



### Demostración

Sea  $z$  en el anillo, elegimos los números  $R_1$  y  $R_2$ , tal que  $r_1 < R_1 < \|z - z_0\| < R_2 < r_2$ , tal como en la figura.



Sea  $\gamma_2: \|z - z_0\| = R_2$ , la circunferencia de radio  $R_2$  y  $\gamma_1: \|z - z_0\| = R_1$ , la circunferencia de radio  $R_1$ .

Por la fórmula generalizada del teorema de la integral de Cauchy se puede escribir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w - z}$$

calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Consideremos las integrales de línea por separado para la integral  $\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w - z}$

escribiremos  $\frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w - z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} f(w)dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ donde} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

para la integral  $\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w - z}$ , escribiremos en la forma

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}}, \text{ se observa que para } w \in \gamma_1, \text{ se tiene:}$$

$\|\frac{w - z_0}{z - z_0}\| < 1$ , luego por la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}, \text{ por lo tanto se tiene.}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w - z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \right] \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

donde  $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  ahora utilizamos el teorema de la deformación para reemplazar  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con la circunferencia  $\gamma_\rho: \|z - z_0\| = \rho$ , esto nos permite expresar una fórmula para  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{-1}, a_{-2}, \dots$  en una sola fórmula

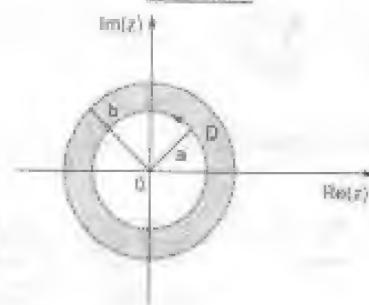
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

con esta elección de los coeficientes tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned} \quad \therefore f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

**Ejemplo.-** Si  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , hallar la serie de Laurent de  $F(z) = \frac{1}{(z - a)(z - b)}$ , válida es  $D = \{z \in \mathbb{C} / a < \|z\| < b\}$

### Desarrollo





a  $F(z)$  expresaremos en una suma de fracciones parciales

$$F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{(A+B)z - bA - aB}{(z-a)(z-b)} \quad \dots (1)$$

de donde  $1 = (A+B)z - bA - aB$ , por identidad

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -bA-aB=1 \end{cases} \text{ al resolver se tiene: } \begin{cases} A = -\frac{1}{b-a} \\ B = \frac{1}{b-a} \end{cases} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$F(z) = -\frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] = -\frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] \quad \dots (3)$$

$$\text{1ro. Para } \|z\| > a, \Rightarrow \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\frac{a}{z}} \right)$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} \quad \dots (4)$$

$$\text{2do. Para } \|z\| < b \Rightarrow \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-z} = -\frac{1}{b} \left( \frac{1}{1-\frac{z}{b}} \right)$$

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{b} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \quad \dots (5)$$

ahora reemplazamos (4) y (5) en (3)

$$F(z) = -\frac{1}{b-a} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right] = \underbrace{-\frac{1}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{-\frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}}_{\text{parte regular}}$$

### 7.9. EJERCICIOS DESARROLLADOS.

- ① Si  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es divergente y si  $\|z_n\| \geq \|u_n\|$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  demuestre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  es divergente.

#### Desarrollo

Demostraremos por el absurdo:

Supongamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  es convergente (pues es absolutamente convergente), como  $\|z_n\| \geq \|u_n\|$  (por hipótesis) para  $n = 1, 2, 3, \dots$  por el "criterio de comparación para convergencia absoluta" la serie infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es absolutamente convergente, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es divergente  $\Rightarrow \infty$ . Luego la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$  es divergente.

- ② Determinar la región de convergencia de la serie de potencia  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n$

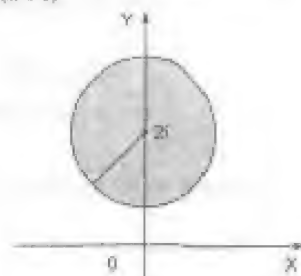
#### Desarrollo

$$\text{Aplicando el criterio de la razón: } u_n = \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+2}{n} (z-2i)^{n+1}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{n+2}{n} (z-2i)^{n+1}}{\frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \|z-2i\| = \|z-2i\|$$

Luego la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n$  es absolutamente

convergente es la región  $\|z-2i\| < 1$



### OTRO MÉTODO.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n$  es absolutamente convergente  $\forall z \in \mathbb{C} / \|z-2i\| < R$  donde

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{n+2} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

entonces  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1} (z-2i)^n$  es absolutamente convergente  $\forall z \in \mathbb{C} / \|z-2i\| < 1$

③

Determinar la región de convergencia de la serie de potencia  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} z^n$

#### Desarrollo

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} z^n$  es absolutamente convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < R$ ,

$$\text{donde } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(-1)^{n+1} (2n+2)!} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+1)(2n+2)(2n)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \Rightarrow R = 1$$



- ④ Hallar la región, radio de convergencia de la serie,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n}$  y su suma.

#### Desarrollo

$$\text{Sea } u_n = \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(z+1)^{n+1}}{2^{n+1} (z-1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{(z+1)^{n+1}}{2^{n+1} (z-1)^{n+1}}}{\frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| < 1$$

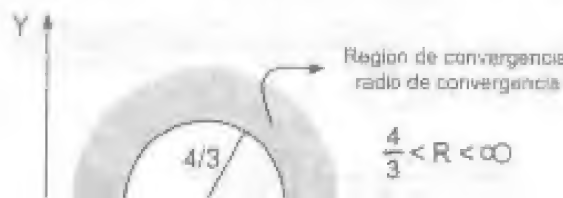
$$\left\| \frac{z+1}{z-1} \right\| < 2 \Rightarrow \|z+1\| < 2 \|z-1\| \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\|z+1\|^2 < 4 \|z-1\|^2 \text{ de donde } (z+1)(\bar{z}+1) < 4(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 < 4(z\bar{z} - z - \bar{z} + 1) \Rightarrow 3z\bar{z} - 5(z + \bar{z}) + 3 > 0$$

$$z\bar{z} - \frac{5}{3}(z + \bar{z}) + 1 > 0, \text{ factorizando } \left(z - \frac{5}{3}\right)\left(\bar{z} - \frac{5}{3}\right) - \frac{25}{9} + 1 > 0 \Rightarrow \left(z - \frac{5}{3}\right)\left(\bar{z} - \frac{5}{3}\right) - \frac{16}{9} > 0$$

$$\text{de donde } \left\| z - \frac{5}{3} \right\|^2 > \frac{16}{9} \Rightarrow \left\| z - \frac{5}{3} \right\| > \frac{4}{3} \text{ es la región de convergencia}$$



Luego la región de convergencia o disco

de convergencia es  $\|z\| < \frac{1}{4}$



Calculando la suma de la serie, para esto aplicamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n} = 1 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^1 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2(z-1)}} = \frac{2(z-1)}{z-3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n} = 1 + \frac{z+1}{2(z-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n} = \frac{2(z-1)}{z-3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n} = \frac{2(z-1)}{z-3} - \left(1 + \frac{z+1}{2(z-1)}\right) = \frac{(z+1)^2}{2(z-3)(z-1)}$$

5

Si  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^n(z-2)^n}$ , hallar la región de convergencia, radio de convergencia y suma de la serie.

**Desarrollo**

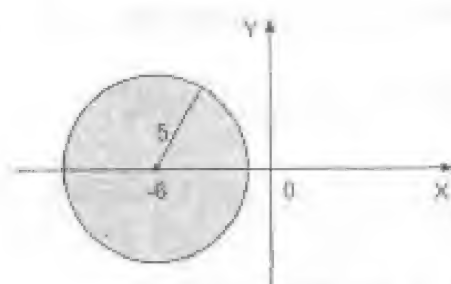
$$u_n = \frac{(z+2)^n}{3^n(z-2)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(z+2)^{n+1}}{3^{n+1}(z-2)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{3^{n+1}(z-2)^{n+1}}{(z+2)^{n+1}} \cdot \frac{(z+2)^n}{3^n(z-2)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{3(z-2)(z+2)}{3(z-2)(z+2)} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z+2}{3(z-2)} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \frac{z+2}{z-2} \right\| < 1$$

$$\left\| \frac{z+2}{z-2} \right\| < 3 \Rightarrow \|z+2\| < 3\|z-2\|, \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\|z+2\|^2 < 9\|z-2\|^2 \Rightarrow (z+2)(\bar{z}+2) < 9(z-2)(\bar{z}-2)$$



$$u_n = \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^{n+1}$$

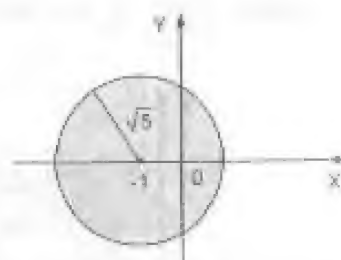
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z+1}{2-i} \right\| = \left\| \frac{z+1}{2-i} \right\| < 1$$

$$\Rightarrow \|z+1\| < \|2-i\| = \sqrt{5} \text{ de donde}$$

$$\|z+1\| < \sqrt{5}, \text{ es la región de convergencia y el radio de convergencia es } R = \sqrt{5}$$

$$\text{La región de convergencia de } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n \text{ es } \|z+6\| < 5 \wedge \|z+1\| < \sqrt{5}$$

Y

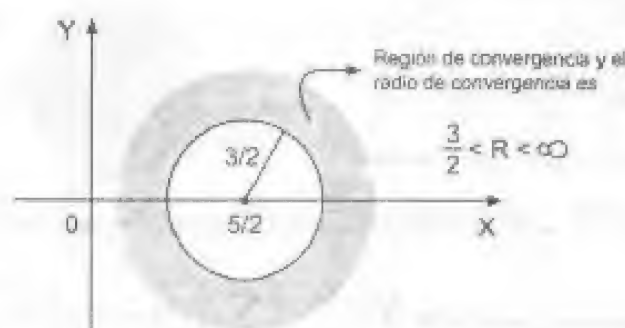


$$z\bar{z} - 2z + 2\bar{z} + 4 < 9(z\bar{z} - 2z - z\bar{z} + 4), \text{ simplificando}$$

$$8z\bar{z} - 20z - 20\bar{z} + 32 > 0 \Rightarrow 2z - \frac{5}{2}(z + \bar{z}) + 4 > 0$$

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{5}{2}\right) - \frac{25}{4} + 4 > 0 \Rightarrow \left(z - \frac{5}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{5}{2}\right) - \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow \left\|z - \frac{5}{2}\right\|^2 > \frac{9}{4}$$

de donde  $\left\|z - \frac{5}{2}\right\| > \frac{3}{2}$  es la región de convergencia



6

Hallar la región de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n$

**Desarrollo**

Calcularemos la región de convergencia de cada serie

$$u_n = \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{z+6}{4-3i}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z+6}{4-3i} \right\| = \left\| \frac{z+6}{4-3i} \right\| < 1$$

$$\text{de donde } \|z+6\| < \|4-3i\| = \sqrt{16+9} = 5$$

Luego  $\|z+6\| < 5$  es la región de convergencia donde el radio de convergencia es  $R = 5$

$$\text{Sea } u_n = \left(\frac{z+7i}{4z-8i}\right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{z+7i}{4z-8i}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| = \left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| < 1$$

$$\left\| \frac{z+7i}{4z-8i} \right\| < 1 \Leftrightarrow \|z+7i\| < \|4z-8i\|, \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\|z+7i\|^2 < \|4z-8i\|^2 \Rightarrow (z+7i)(\bar{z}-7i) < (4z-8i)(4\bar{z}+8i)$$

$$z\bar{z} - 7i(z - \bar{z}) + 49 < 16z\bar{z} + 32i(z - \bar{z}) + 64, \text{ simplificando } 15z\bar{z} + 39i(z - \bar{z}) + 15 > 0$$

$$\text{de donde } z\bar{z} + \frac{39}{15}i(z - \bar{z}) + 1 > 0, \text{ factorizando } \left(z - \frac{39}{15}i\right)\left(\bar{z} + \frac{39}{15}i\right) - \frac{1521}{225} + 1 > 0$$

$$\left\|z - \frac{39}{15}i\right\|^2 > \frac{1396}{225} \Rightarrow \left\|z - \frac{39}{15}i\right\| > \frac{2\sqrt{349}}{15} \text{ es la región de convergencia y el radio de}$$

$$\text{convergencia } \frac{2\sqrt{349}}{15} < R < \infty$$

8

Halla región de convergencia de la serie de potencia  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{9^n z^n}\right)$

**Desarrollo**





7

Hallar la región de convergencia y el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+7}{4z-5} \right)^n$

Desarrollo

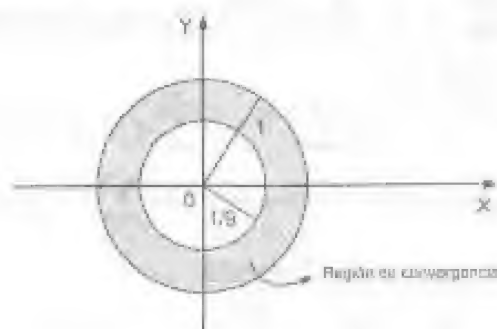
Sea  $u_n = \frac{1}{9^n z^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{9^{n+1} z^{n+1}}$ , por el criterio de la razón

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{1}{9^{n+1} z^{n+1}}}{\frac{1}{9^n z^n}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{9^n z^n}{9^{n+1} z^{n+1}} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \left\| \frac{1}{z} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \frac{1}{z} \right\| < 1 \Rightarrow \|z\| > \frac{1}{9}$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n z^n}$  es absolutamente convergente en  $\|z\| > \frac{1}{9}$

7)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( z^n + \frac{1}{9^n z^n} \right)$  es convergente en el anillo  $\frac{1}{9} < \|z\| < 1$



Hallar la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$

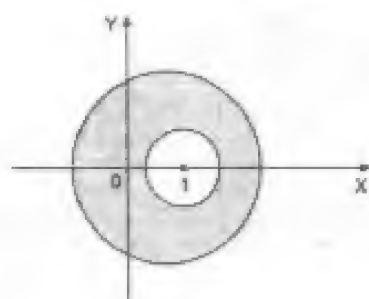
Desarrollo

Calculando la región de convergencia de cada serie

$u_n = \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1} (z-1)^{n+2}}$ , por el criterio de la razón

348

Eduardo Espinoza Ramos



10

Hallar la región de convergencia y el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (z-4)^n}{(z+4)^n}$

Desarrollo

Aplicando el criterio de la razón:  $u_n = \frac{5^n (z-4)^n}{(z+4)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5^{n+1} (z-4)^{n+1}}{(z+4)^{n+1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( z^n + \frac{1}{9^n z^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n z^n}$$

Sea  $u_n = z^n \Rightarrow u_{n+1} = z^{n+1}$ , por el criterio de la razón

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z\| = \|z\| < 1$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  es absolutamente convergente en  $\|z\| < 1$

Serie de Potencias, De Taylor y De Laurent

347

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1} (z-1)^{n+2}}}{\frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}}} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{2^n (z-1)^{n+1} (n+1)}{2^{n+1} (z-1)^{n+2} n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n+1}{2n(z-1)} \right\| = \left\| \frac{1}{2(z-1)} \right\| < 1$$

$\left\| \frac{1}{2(z-1)} \right\| < 1 \Rightarrow \|z-1\| > \frac{1}{2}$ , luego la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}}$  es absolutamente convergente en  $\|z-1\| > \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)(z-1)^n}{3^{n+1}}$ , por el criterio de la razón

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{(n+1)(z-1)^n}{3^{n+1}}}{\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{3^n (n+1)(z-1)^n}{3^{n+1} n(z-1)^{n-1}} \right\|$$

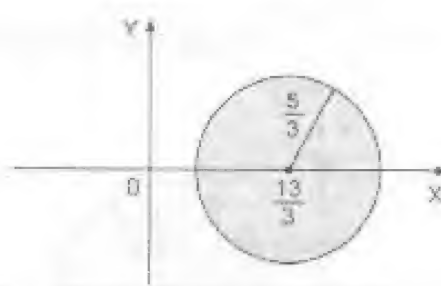
$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \|z-1\| = \frac{1}{3} \|z-1\| < 1$$

$\frac{1}{3} \|z-1\| < 1 \Rightarrow \|z-1\| < 3$ , luego la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$  es absolutamente convergente en  $\|z-1\| < 3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$  es convergente en el anillo  $\frac{1}{2} < \|z-1\| < 3$

Serie de Potencias, De Taylor y De Laurent

349



11) Dado la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (1-z)^n}{(1+z)^n}$ , hallar:

- La región de convergencia.
- El radio de convergencia.
- La suma de la serie

Desarrollo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(z+4)^{n+1}}{5^n (z-4)^n} \right\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{5^{n+1} (z+4)^n (z-4)^{n+1}}{5^n (z+4)^{n+1} (z-4)^n} \right\| = 5 \left\| \frac{z-4}{z+4} \right\| < 1$$

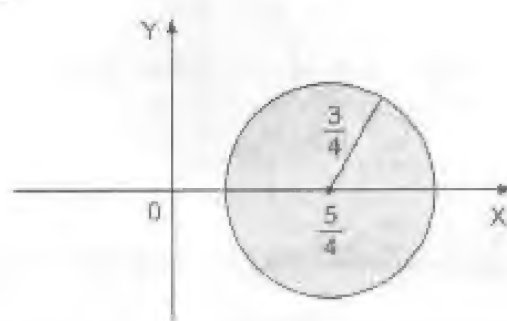
$$5 \left\| \frac{z-4}{z+4} \right\| < 1 \Rightarrow 5 \|z-4\| < \|z+4\| \text{ elevando al cuadrado}$$

$$25 \|z-4\|^2 < \|z+4\|^2 \Rightarrow 25(z-4)(\bar{z}-4) < (z+4)(\bar{z}+4)$$

$$25z\bar{z} - 100z - 100\bar{z} + 400 < z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 16 \Rightarrow 24z\bar{z} - 104z - 104\bar{z} + 384 < 0$$

$$z\bar{z} - \frac{13}{3}(z+\bar{z}) + 16 < 0, \text{ factorizando } (z - \frac{13}{3})(\bar{z} - \frac{13}{3}) - \frac{169}{9} + 16 < 0, \text{ de donde}$$

$$\left| z - \frac{13}{3} \right|^2 < \frac{25}{9} \Rightarrow \left| z - \frac{13}{3} \right| < \frac{5}{3} \text{ es la región de convergencia y } R = \frac{5}{3} \text{ es el radio de convergencia.}$$



Ahora veremos la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (1-z)^n}{(1+z)^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (1-z)^n}{(1+z)^n} = 1 + \left( \frac{3(1-z)}{1+z} \right) + \left( \frac{3(1-z)}{1+z} \right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{3(1-z)}{1+z}} = \frac{1+z}{1+z-3(1-z)} = \frac{1+z}{4z-2}$$

- 12 Hallar la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{6}{z+3i} \right)^n$

Desarrollo

Calculando la región de convergencia de cada una de la series de potencias.

- i) Para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^n$

$$u_n = \left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^n \Rightarrow u_{n+1} = \left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^{n+1}, \text{ aplicando el criterio de la razón}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^{n+1}}{\left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{z+3i}{3z+5i} \right\| = \left\| \frac{z+3i}{3z+5i} \right\| < 1$$



$$\text{Sea } u_n = \frac{3^n (1-z)^n}{(1+z)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{3^{n+1} (1-z)^{n+1}}{(1+z)^{n+1}}, \text{ de donde}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{3^{n+1} (1-z)^{n+1}}{3^n (1-z)^n (1+z)^{n+1}} \right\| = 3 \left\| \frac{1-z}{1+z} \right\| < 1$$

$$3 \left\| \frac{1-z}{1+z} \right\| < 1 \Rightarrow 3 \|1-z\| < \|1+z\| \text{ elevando al cuadrado}$$

$$9 \|1-z\|^2 < \|1+z\|^2 \Rightarrow 9(1-z)(1-\bar{z}) < (1+z)(1+\bar{z})$$

$$9(1-z-\bar{z}+z\bar{z}) < 1+z+\bar{z}+z\bar{z}, \text{ simplificando}$$

$$8z\bar{z} - 10z - 10\bar{z} + 8 < 0 \Rightarrow z\bar{z} - \frac{5}{4}z - \frac{5}{4}\bar{z} + 1 < 0$$

$$z\bar{z} - \frac{5}{4}(z+\bar{z}) + 1 < 0 \Rightarrow (z - \frac{5}{4})(\bar{z} - \frac{5}{4}) - \frac{25}{16} + 1 < 0$$

La serie converge absolutamente si y solo si

$$\left| \frac{z+3i}{3z+5i} \right| < 1 \Leftrightarrow \|z+3i\| < \|3z+5i\|, \text{ de donde}$$

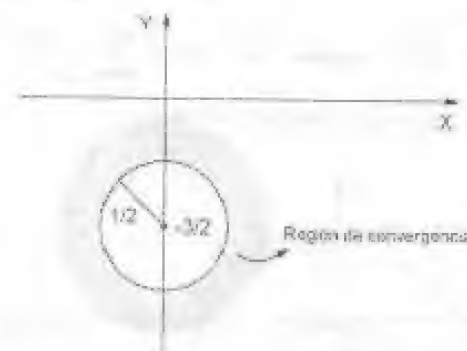
$$\|x + (y+3i)\| < \|3x + (3y+5i)\| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} < \sqrt{9x^2 + (3y+5)^2}$$

$$x^2 + (y+3)^2 < 9x^2 + (3y+5)^2, \text{ desarrollando}$$

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 < 9x^2 + 9y^2 + 30y + 25, \text{ simplificando}$$

$$x^2 + y^2 - 3y > -2, \text{ completando cuadrado se tiene:}$$

$$x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 > \frac{1}{4} \text{ de donde } \frac{1}{2} < R < \infty$$



- ii) Para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{(z+3i)^n}$ , de donde

$$u_n = \frac{6^n}{(z+3i)^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(z+3i)^{n+1}}, \text{ entonces}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{6^{n+1}}{6^n (z+3i)^{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{6(z+3i)^n}{6^n (z+3i)^{n+1}} \right\| = \left\| \frac{6}{z+3i} \right\| < 1$$

la serie converge absolutamente si y solo si

$$6 \left\| \frac{1}{z+3i} \right\| < 1 \Leftrightarrow \|z+3i\| > 6$$



$$f(z) = \sec z \quad f(0) = 0$$

$$f'(z) = \sec z \quad f'(0) = 1$$

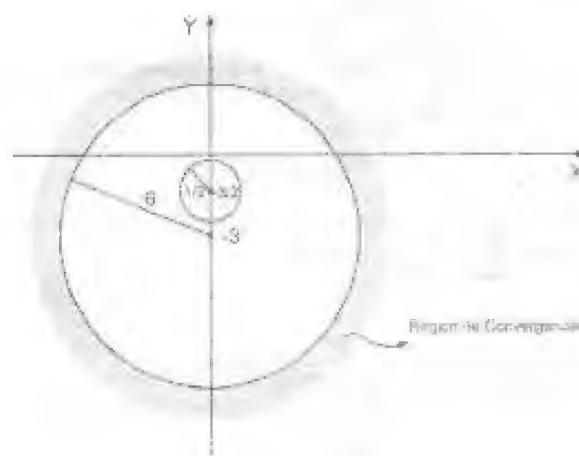
$$f''(z) = -\sec z \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(z) = -\sec z \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(z) = \sec z \quad f^{(4)}(0) = 0$$



Luego la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3i}{3z+5i}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{(z+3i)^n}$  es la intersección de las regiones de convergencias, es decir:



- (13) Hallar la serie de Taylor de  $f(z) = \operatorname{sen} z$ , alrededor de  $z=0$ .

Desarrollo

$$f^{(n)}(z) = \cosh z \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$f(z) = \cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \|z\| < \infty$$

$$\therefore f(z) = \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

- (15) Verificar que  $f(z) = \operatorname{sen}^3 z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-3^{2n+1}) z^{2n+1}}{3(2n+1)!}$

Desarrollo

Sabemos que  $\operatorname{sen}^3 z = \frac{3}{4} \operatorname{sen} z - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3z$ , por lo tanto de acuerdo al ejercicio (13) se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) = \operatorname{sen}^3 z &= \frac{3}{4} \operatorname{sen} z - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3z = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-3^{2n+1}) z^{2n+1}}{3(2n+1)!} \end{aligned}$$

- (16) La función  $f(z) = \frac{3+2z}{z+z^2}$  se puede desarrollar como serie de Taylor alrededor de  $z=0$

Desarrollo

$f(z)$  no es analítico en  $z=0 \Rightarrow$  no es desarrollable como serie de Taylor, sin embargo se puede desarrollar como una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$f(z) = \frac{3+2z}{z+z^2} = \frac{1}{z} \left( \frac{2z+3}{z+1} \right) = \frac{1}{z} \left( 2 + \frac{1}{z+1} \right) \quad \dots (1)$$

$$f(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!}, \text{ desarrollando se tiene:}$$

$$\begin{aligned} f(z) = \operatorname{sen} z &= f(0) + \frac{f'(0)z}{1!} + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \frac{f'''(0)z^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)z^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)z^5}{5!} + \dots \\ &= 0 + z + 0 - \frac{1}{3!} z^3 + 0 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ es convergente.} \end{aligned}$$

- (14) Hallar la serie de Taylor de  $f(z) = \cosh z$ , alrededor de  $z=0$

Desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!} = f(0) + \frac{f'(0)z}{1!} + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \frac{f'''(0)z^3}{3!} + \dots$$

$$f(z) = \cosh z \quad f(0) = 1$$

$$f'(z) = \sinh z \quad f'(0) = 0$$

$$f''(z) = \cosh z \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(z) = \sinh z \quad f'''(0) = 0$$

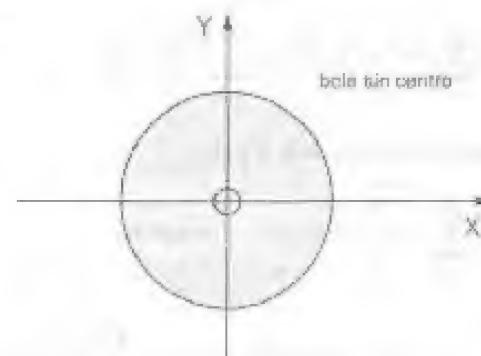
pero  $\frac{1}{z+1}$  es analítico en  $z=0$ , entonces su representación

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( 2 + \frac{1}{z+1} \right) = \frac{1}{z} \left( 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}$$

$$f(z) = \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}, \text{ convergente en } 0 < \|z\| < 1$$



- (17) Hallar la serie de Taylor alrededor de  $z=0$  de la función  $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$

Desarrollo

$$\text{Como } f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z) \quad \dots (1)$$

Calculando la serie de  $\ln(1+z)$  alrededor de  $z=0$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!}, \text{ serie de Taylor, donde}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right)$$



$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{2^{n+1}}$$

23

Desarrolle la función  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ , en una vecindad del punto  $z=2$  y el anillo

$$1 \leq \|z\| < 2$$

Desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-2)^{-n}$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$

calculando los valores de A, B y C se tiene:

$$A = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 2z + 5}{z^2 + 1} = \frac{4 - 4 + 5}{5} = 1$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z-i)} = \frac{-1 + 2i + 5}{(-i-2)(-2i)} = \frac{2(i+2)}{2(i+2)} = 1$$

$$C = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+i)} = \frac{-1 - 2i + 5}{(i-2)(2i)} = \frac{2(2-i)}{(i-2)(2-i)} = i, \text{ por lo tanto}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{(z-2)(2+i)} + \frac{1}{(z-2)(2-i)}$$

$$= \frac{1}{z-2} + \frac{i}{(2+i)(1+\frac{z-2}{2+i})} + \frac{1}{(2-i)(1+\frac{z-2}{2-i})}$$

$$= \frac{1}{z-2} + \frac{i}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n + \frac{1}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n$$

$$\text{esto vale si } \left\| \frac{z-2}{2+i} \right\| < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{z-2}{2-i} \right\| < 1$$

$$\text{entonces } f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{(2+i)^{n+1}} + \frac{1}{(2-i)^{n+1}} \right) (z-2)^{n+1}$$

$$\|z-2\| < \|2+i\| \quad \wedge \quad \|z-2\| < \|2-i\| \Rightarrow \|z-2\| < \sqrt{5}$$

24

Determinar la serie de Laurent de  $f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$  en  $\|z\| < 1$

Desarrollo

Descomponiendo en sumas parciales a la función racional

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{z+2} + \frac{1}{z-1} \right] \quad \dots (1)$$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} \quad \text{si } \|z\| < 2 \quad \dots (2)$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{si } \|z\| < 1 \quad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{2^n} \right) z^n \quad \text{para } \|z\| < 1$$

25

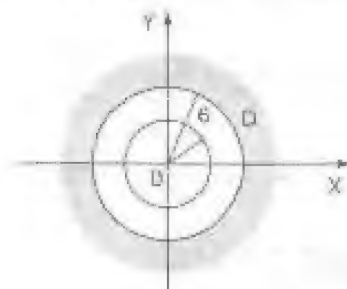
Obtenga la serie de Laurent para la función  $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$  en el dominio

$$D: \|z\| > b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b > a$$

Desarrollo

Expresamos a  $f(z)$  en una descomposición de las fracciones parciales

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = -\frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) \quad \dots (1)$$



como el desarrollo requiere que sea válido en el dominio D del gráfico para el cual  $\|z\| > b$

no se puede utilizar el desarrollo de  $\frac{1}{z-b}$  que es válido para  $\|z\| < b$ , en su lugar se tiene:

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z(1-\frac{b}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-1}}{z^n} \quad \text{para } \|z\| > b$$

como  $b > a \Rightarrow \|z\| > a$  se hace en la misma forma

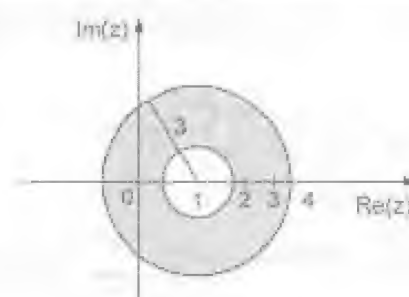
$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-\frac{a}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}, \text{ para } \|z\| > a \text{ y por lo tanto } \|z\| > b$$

ahora reemplazamos en (1) se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = -\frac{1}{b-a} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n-1}}{z^n} \right]$$

$$\therefore f(z) = -\frac{1}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{z^n} \quad \text{para } \|z\| > b$$

NOTA: Como para  $n=1$  el primer término es cero por eso ponemos para  $n=2$



$$\text{ten. Para } \|z-1\| > \frac{1}{2} \text{ entonces } \frac{1}{2\|z-1\|} < 1$$

$$\frac{1}{4-z} = \frac{1}{3-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \left( \frac{1}{1-\frac{3}{z-1}} \right) = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^n}$$

$$\frac{1}{4-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}, \text{ derivando } \frac{1}{(4-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(z-1)^{n+2}}$$

$$\frac{3}{(4-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{(z-1)^{n+2}} \quad \dots (1)$$

$$\frac{1}{2z-3} = \frac{1}{2(z-1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2(z-1)}} = \frac{1}{2(z-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-1)^n}$$

$$\frac{1}{2z-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} (z-1)^{n+1}}, \text{ derivando } \frac{2}{(2z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1} (z-1)^{n+2}} \quad \dots (2)$$

sumando miembro a miembro (1) y (2) se tiene:

26) Hallar la serie de Laurent de la función dada  $f(z) = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}$ , válida para

$$\frac{1}{2} < \|z-1\| < 3$$

Desarrollo

2do Para  $\|z-1\| < 3 \Rightarrow \left\| \frac{z-1}{3} \right\| < 1$

$$\frac{1}{4-z} = \frac{1}{3-(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$$

$$\frac{1}{4-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}, \text{ derivando } \frac{1}{(4-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^{n+1}}, \text{ de donde}$$

$$\frac{3}{(4-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} \quad \dots (4)$$

$$\frac{1}{2z-3} = \frac{1}{-1+2(z-1)} = \frac{1}{1-2(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-1)^n, \text{ derivando}$$

$$\frac{2}{(2z-3)^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n (z-1)^{n-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (n+1) (z-1)^n$$

$$\frac{2}{(2z-3)^2} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (n+1) (z-1)^n \quad \dots (5)$$

sumando miembro a miembro (4) y (5) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n+1}{3^n} - 2^{n+1} (n+1) \right) (z-1)^n \quad \dots (6) \end{aligned}$$

por lo tanto de (3) y (6) se tiene:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left( \frac{1}{3^n} - 2^{n+1} \right) (z-1)^n}_{\text{parte analítica}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left( \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \frac{1}{(z-1)^{n+1}}}_{\text{parte polarizada}}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{(z-1)^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}(z-1)^{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( (n+1)3^{n+1} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) \frac{1}{(z-1)^{n+2}} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

### 7.10. EJERCICIOS PROPUESTOS.

- 1) Dada la serie de potencia  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z+6i}{3z-7i} \right)^n$ , hallar:
  - a) La región de convergencia
  - b) Radio de convergencia
  - c) suma de la serie
- 2) Dada la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+4i}{3z-5i} \right)^n$  en  $\mathbb{C}$ , hallar:
  - a) región y radio de convergencia
  - b) Su suma
- 3) Hallar el radio de convergencia y la suma de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1}$
- 4) Hallar el intervalo de convergencia y analizar los extremos de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}$
- 5) Hallar el intervalo de convergencia y analizar en los extremos de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{3^n n^n}$
- 6) Calcular el dominio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n^2}$
- 7) Hallar la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z+2i}{3+4i} \right)^n$
- 8) Hallar la región de convergencia y suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$
- 9) Determinar el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^{3n} - z^{2n})$

- 10) Calcular la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i\pi n}{4}}$
- 11) Hallar la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{4^n z^n} \right)$
- 12) Hallar la región y radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( z^n + \frac{1}{2^n z^n} \right)$
- 13) Hallar la región y radio de convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6}{z+3i} \right)^n$
- 14) Hallar la región y radio de convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-3)^n}{(1-z)^n}$
- 15) Hallar la región y radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!} z^n$
- 16) Hallar el campo de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n}}{(z+1)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{i\pi n} 2^n}$

- 10) Hallar la región de convergencia y la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$
- 21) Hallar el radio y región de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+3i}{3z+5i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{6}{z+3i} \right)^n$
- 22) Hallar la región y el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{4^n z^n} \right)$
- 23) Probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$  converge para  $\|z\| \leq 1$
- 24) Hallar la región de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$
- 25) Hallar la región de convergencia de las series:
  - a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$
  - b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$
- 26) ¿Para qué valores de  $z$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$  converge?



17) Hallar la región de convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n (z-i\frac{\pi}{2})^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{i+n}\right)^n$

18) Hallar la región de convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (z+2i)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n (z-1)^n}$

19) Hallar la región de convergencia y la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n+1}}\right)$

27) Determinar el conjunto de valores de  $z$  para los cuales la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$  converge y hallar su suma.

28) Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} z^n$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z}$

29) Hallar la región de convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$

30) Estudiar la región de convergencia absoluta de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

31) Hallar la región de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{12i n \pi}}{(n+1)^2}$

32) Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las series siguientes:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (z+3i)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} (z-i)^{2n}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n+2} (z-3)^n$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} (z-1+2i)^n$

33) Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las siguientes series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+1+4i)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}} (z+4-i)^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2n+1} (z+6+2i)^{2n}$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} (z-3)^{2n}$

34) Encuentre el radio de convergencia y el disco de convergencia de las siguientes series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i n \pi}}{2n+1} (z+4)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2+i}\right)^n (z-5)^{1/n}$

35) Demuestre que: Si  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$

36) Determine el radio de convergencia de las series

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

37) Determine el radio de convergencia de las series:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n] z^n$

e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$

f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$

38) Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ , compruebe que:  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ ,  $\|\lambda\| < 1$

39) Probar que:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ , converge uniformemente para todo disco cerrado:  $\|z\| \leq r < \|z_0\|$

40) Determinar las regiones en las cuales cada una de las siguientes series es uniformemente convergente

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n - 1}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{1/n}}{n^2}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + i} z^n$

41) Use el criterio del cociente para demostrar que las siguientes series convergen absolutamente en el dominio indicado.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{n^2 z}$ , cuando  $\text{Im}(z) > 0$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$ , cuando  $\|z\| > 0$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-2n} (z+i)^{n+1}}{n}$ , cuando  $\|z+1\| < 4$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1-i)^{2n}}$ , cuando  $\|z-1-i\| > \sqrt{2}$

e)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$ , cuando  $\|z\| \leq e$

2) Halle los conjuntos en los que converge uniformemente las series dadas:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n^2}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n}$

3) Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado:

a)  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ,  $z_0 = 4i$

b)  $f(z) = e^z$ ,  $z_0 = -3i$

c)  $f(z) = \frac{1}{2+z}$ ,  $1-8i$

d)  $f(z) = 1 + \frac{1}{2+z}$ ,  $z = i$

4) Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado.

50) Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado

a)  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ ,  $z_0 = 0$

b)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ ,  $z_0 = 1$

c)  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ,  $z_0 = 1+i$

d)  $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$ ,  $z_0 = 2$

51) Desarrolle la función en una serie de Taylor alrededor del punto indicado.

a)  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ ,  $z_0 = 2$

b)  $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)(z+1)}$ ,  $z_0 = 0$

52) Desarrolle las funciones en una serie de potencia  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  y halle el radio de convergencia.

a)  $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ ,  $z_0 = 0$

b)  $f(z) = \frac{1}{z-2-4i}$ ,  $z_0 = -2i$

c)  $f(z) = e^k - \operatorname{sen} z$ ,  $z_0 = 0$

d)  $f(z) = \cos z^2 - \operatorname{sen} z$ ,  $z_0 = 0$

53) Demostrar que  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ , ( $\|z\| < \infty$ )

54) Hallar la serie de Maclaurin de la función  $f(z) = \frac{z}{z^2+9}$

55) Deducir la representación en serie de Taylor  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$ ,  $\|z-i\| < \sqrt{2}$

56) Demostrar que para  $0 < \|z\| < 4$ ,  $\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}$

57) Desarrolle  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$  en serie de MACLAURIN

a)  $f(z) = \frac{z}{z^2-4z+13}$

b)  $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

c)  $f(z) = \ln(z^2-3z+2)$

d)  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$

53) Desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias de  $z-1$  y halle el radio de convergencia.

a)  $f(z) = \frac{z}{z+2}$

b)  $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+5}$

c)  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$

54) Demuestre que los coeficientes  $c_n$  del desarrollo  $\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , verifican la relación  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ . Halle  $c_n$  y el radio de convergencia de la serie.

55) Hallar la serie de Laurent de  $f(z) = \frac{8}{(2z-9)^2} + \frac{216}{(10-z)^3}$ , válido para el anillo  $\frac{1}{2} < \|z-4\| < 6$

74) Encuentre la serie de Laurent de la función  $f(z) = \frac{z}{z^2+z-2}$  en las regiones indicadas.

a)  $\|z\| < 1$

b)  $0 < \|z+1\| < 3$

c)  $0 < \|z+2\| < 3$

d)  $1 < \|z\| < 2$

e)  $\|z\| > 2$

f)  $\|z+2\| > 3$

75) Escribir las dos series de Laurent en potencias de  $z$  que representan a la función  $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$  en ciertos dominios.

## CAPÍTULO VIII





Como  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$ , entonces  $z = 0$  es una singularidad removible.

## 8.2. RESIDUOS.-

Se conoce que el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica  $f(z)$  es una región anular  $D = \{z \in \mathbb{C} / R_1 < \|z - z_0\| < R_2\}$  está dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \quad (1)$$

Si la parte principal consiste de un número finito de términos es decir  $b_n = 0$ , para  $n > m$  y  $b_m \neq 0$  entonces la serie (1) toma la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + 0 + 0 + \dots$$

en este caso  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z = z_0$  y el coeficiente  $b_1$  denotado por  $a_{-1} = b_1$  recibe el nombre de residuo de  $f$  en  $z_0$ .

Si  $f(z)$  tiene un polo simple  $z = z_0$ , entonces la serie es  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0}$

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots + \frac{b_1}{z - z_0}$$

$(z - z_0)f(z) = a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^{n+1} + \dots + b_1$  basta tomar el límite cuando  $z \rightarrow z_0$

se tiene:  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = b_1 = \text{Res}(f, z_0)$ ,  $b_1$  recibe el nombre de  $\text{Res}(f, z_0)$  en  $z = z_0$

En este caso  $F(z)$  se puede expresar mediante la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \text{ convergente } \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que}$$

$$0 < \|z - z_0\| < R \text{ y } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} F(z) dz$$

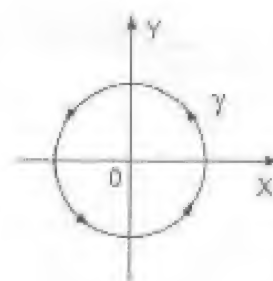
donde  $\gamma$  es una curva cerrada contenida en el anillo  $0 < \|z - z_0\| < R$

Si  $n = 1$ ,  $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$ , de donde

$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1$  donde  $b_1$  es el coeficiente de  $\frac{1}{z - z_0}$  y  $b_1$  es el residuo de  $F(z)$  que denotaremos por  $\text{Res}(F, z_0) = b_1$ , por lo tanto,

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}(F, z_0)$$

**Ejemplo.-** Calcular la integral  $\oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 1$



**Desarrollo**

$F(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ , no es analítica en  $z = 0$

es decir  $z = 0$  es un polo de  $F(z)$

## 8.3. TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si  $f(z)$  es una fracción analítica dentro y sobre una curva  $\gamma$  excepto en un número finito de puntos singulares  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$  pertenecientes al interior de  $\gamma$ , entonces:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

**Demostración**

Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en  $\gamma$ , excepto en los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_m$  dentro de  $\gamma$

También sea  $Cr_j(z_j)$  la circunferencia de centros  $z_j$  y de radio  $r_j$  suficientemente pequeña para que  $Cr_j(z_j) \subset \gamma, \forall j$

$Cr_j(z_j) \cap Cr_k(z_k) = \emptyset, \forall k \neq j$  entonces

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \oint_{Cr_j(z_j)} f(z) dz = \sum_{j=1}^m 2\pi i \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

$$\therefore \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j)$$

**OBSERVACIÓN.-** Si  $z_0$  es un polo de orden  $m$ , hay una fórmula relativamente simple para calcular  $\text{Res}(f, z_0)$

## 8.4. TEOREMA.-

Si  $z_0$  es un polo de orden  $m$  de la función  $f(z)$  entonces:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

En el caso  $m = 1$  y  $0! = 1$ , por lo tanto si  $f$  tiene un polo simple de  $z_0$ , entonces se tiene:  $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

$$F(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = z^3 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right)$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \dots$$

$$\text{Luego } b_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \Rightarrow b_1 = \text{Res}(F, 0) = \frac{1}{24}$$

$$\oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \text{Res}(F, 0) = 2\pi i \left( \frac{1}{24} \right) = \frac{\pi}{12} i$$

**Ejemplo.-** Calcular la integral  $\oint_{\gamma} z^4 \sin \frac{1}{z} dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 1$

**Desarrollo**

$f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}$ , no es analítica en  $z = 0$  que está dentro de  $\gamma$  entonces  $z = 0$  es un polo de  $f(z)$ .

$$f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}$$

$$= z^4 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots \right) = \left( z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \dots \right)$$

$$\text{Luego } b_1 = \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

$$\oint_{\gamma} z^4 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \left( \frac{1}{120} \right) = \frac{\pi}{60} i$$



**Demostración**

Como  $z_0$  es un polo de orden  $m$  de la función  $f(z)$ , entonces  $f$  tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo  $0 < \|z - z_0\| < R$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (a)$$

con  $a_{-m} \neq 0$ , puesto que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z_0$

ahora lo que queremos evaluar es  $a_{-1}$  que es el residuo de  $f$  en  $z_0$  es decir:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} \quad \dots (1)$$

a la ecuación (a) multiplicamos por  $(z-z_0)^m$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_0(z-z_0)^m + \dots$$

como la serie de la derecha es una serie de Taylor alrededor de  $z_0$ , entonces  $(z-z_0)^m f(z)$  es analítica en  $z_0$  ahora derivamos esta ecuación  $m-1$  veces es decir:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)(m-2)\dots(1) + a_0 m(m-1)(m-2)\dots(2)(z-z_0) + \dots$$

tomando límite cuando  $z \rightarrow z_0$  se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} [a_{-1}(m-1)! + a_0 m! (z-z_0) + \dots] \\ = a_{-1}(m-1)! + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\text{de donde se obtiene: } a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \quad \dots (2)$$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

**Ejemplo.-** Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3} dz$ , si  $\gamma$  es una curva simple suave a pedazos que encierra a  $i$

**Desarrollo**

La función  $\operatorname{sen} 2z$  es analítica  $\forall z$  y no se anula en  $i$ , además  $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3}$  tiene un polo de orden 3 en  $i$ .

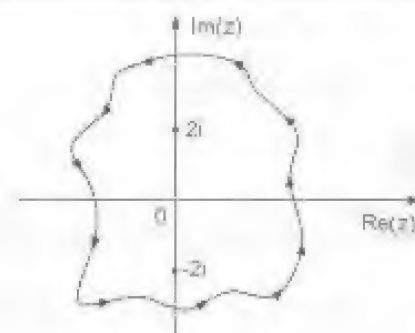
$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z-i)^3 \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3}] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} (\operatorname{sen} 2z) \\ = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (2 \cos 2z) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} (-4 \operatorname{sen} 2z) = -2 \operatorname{sen} 2i$$

$$\text{Luego } \oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i (-2 \operatorname{sen} 2i) = -4\pi i \operatorname{sen} 2i$$

$$\operatorname{sen} 2i = \frac{1}{2i} (e^{-2} - e^2) = -\frac{1}{2i} (e^2 - e^{-2}) = i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = i \operatorname{senh} 2$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3} dz = 4\pi \operatorname{senh} 2$$

**Ejemplo.-** Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2+4)} dz$  si  $\gamma$  es cualquier curva simple suave a trazos que encierra a:  $0, 2i, -2i$  como se muestra en la figura.

**Desarrollo**

La función  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2+4)}$  tiene un polo en  $z=0$  de orden 2, sin embargo podemos

$$\text{escribir en la forma: } f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\operatorname{sen}^2 z + 4)} = \frac{z}{z^2(z^2+4)} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

como  $g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  tiene una singularidad removible en  $z=0$  puesto que

$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$  y  $h(z)$  tiene ceros simples en  $0, 2i, -2i$  por lo tanto  $\frac{g(z)}{h(z)}$  tiene polos simples en  $0, 2i, -2i$ .

Ahora calculamos los residuos de  $f$  en estas singularidades

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2+4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \cdot \frac{1}{z^2+4} = (1) \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z-2i) \operatorname{sen} z}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2+2i)} = \frac{\operatorname{sen} 2i}{-16i} = \frac{i \operatorname{sen} 2i}{16}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z+2i) \operatorname{sen} z}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z-2i)} = -\frac{\operatorname{sen} 2i}{16i} = i \frac{\operatorname{sen} 2i}{16}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(z^2+4)} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 2i) + \operatorname{Res}(f, -2i)] \\ = 2\pi i \left[ \frac{1}{4} + \frac{i \operatorname{sen} 2i}{16} + \frac{i \operatorname{sen} 2i}{16} \right] = \frac{\pi}{4} (2i + \operatorname{sen} 2i)$$

**Demostración**

Como  $f$  tiene un polo simple en  $z_0$  y  $h$  tiene un cero simple en  $z_0$ ,  $h(z_0) = 0$  y  $h'(z_0) \neq 0$  entonces:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = g(z_0) \cdot \frac{1}{h'(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

**Ejemplo.-** Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{3z^2+1}{1+z^2} dz$ , si  $\gamma$  es cualquier curva cerrado simple suave a pedazos que encierra a  $i$ , pero no a  $-i$ .

**Desarrollo**

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{3i^2+1}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$$

$$\oint_{\gamma} \frac{3z^2+1}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i (i) = -2\pi$$

**Ejemplo.-** Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}$ , donde  $\gamma$  es:

a)  $\gamma: \|z-2i\| = 6$

b)  $\gamma$  es el cuadrado de vértices  $1+i, 2+i, 2+2i, 1+2i$

**Desarrollo**

Sea  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , donde  $g, h$  son analíticas en  $z_0$ ,  $g(z_0) \neq 0$  y  $h$  tiene un cero simple

en  $z_0$ , entonces  $f$  tiene un polo simple en  $z_0$  y  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$

$$\text{Res}(f, -2) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z+2)^1 (2z^2+5)}{(z+2)^3 (z^2+4)z^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2z^2+5}{(z^2+4)z^2} \right] = 0.45$$

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2(2z^2+5)}{(z+2)^3 (z^2+4)z^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2z^2+5}{(z+2)^3 (z^2+4)} \right] = -0.23$$

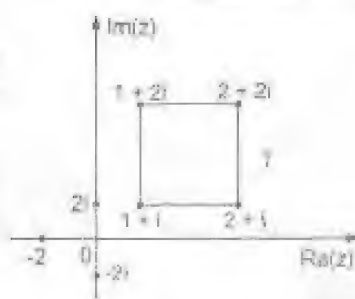
$$\text{Res}(f, 2i) = \frac{P(2i)}{Q'(2i)} = \frac{-3}{256 - 256i} = -0.0058 - 0.0058i$$

$$\text{Res}(f, -2i) = \frac{P(-2i)}{Q'(-2i)} = -0.0058 + 0.0058i$$

$$\oint_{\gamma} \frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3 (z^2+4)z^2} = 2\pi i [\text{Res}(f, -2) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, -2i)]$$

$$= 2\pi i [0.45 - 0.23 - 0.0058 - 0.0058i - 0.0058 + 0.0058i] = 0.94168 \pi i$$

b)



Los puntos  $-2, 0, 2i, -2i$  no están en el interior de  $\gamma$ .

Luego por la fórmula de la integral de

Cauchy se tiene!  $\oint_{\gamma} \frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3 (z^2+4)z^2} = 0$

## 6. EJERCICIOS DESARROLLADOS.

1) Hallar las singularidades de la función  $f(z) = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+(3-i)z-3)^2 z^2}$

Desarrollo

a)



-2 polo de orden 3

2i polo simple

-2i polo simple

0 polo de orden 2

$f(z) = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2 z^2}$ , es analítica excepto en  $z = -3, i, 0$  puesto que sería  $\infty$ , por el denominador

$$f(z) = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+(3-i)z-3)^2 z^2} = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+3z-(3-3i)z^2)^2} = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2 z^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2 z^2} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-i)^2} = \frac{1}{(-3-i)(-3-i)}$$

$$= \frac{1}{3(3+i)} = \frac{3-i}{3(9+1)} = \frac{1}{10} - \frac{i}{30}$$

existe por lo tanto  $f(z)$  tiene una singularidad en  $z = -3$

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i, \text{ es decir que } f(z) \text{ tiene un polo simple en } z = i$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2 z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-i} = -1$$

por lo tanto  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = 0$

2)

Hallar los puntos singulares de la función  $f(z) = \frac{\exp(z)}{(z-1)^2}$ , analice la naturaleza de los mismos.

Desarrollo

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, z=1 \text{ es una singularidad aislada}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{(z-1)+1}}{(z-1)^2} = e \cdot \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$$

$$f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-2}}{n!} = e \left[ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^{n-2} \right]$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{n-2}, \text{ de donde } z=1 \text{ es un polo de orden 2}$$

3)

Sea  $f$  una función analítica en punto  $z_0$ , probar que

a) Si  $f(z_0) = 0$ , entonces  $z_0$  es un punto singular evitable de la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$

b) Si  $f(z_0) \neq 0$ , el punto  $z_0$  es un polo simple de la función  $g$  de la parte a) con residuo  $f(z_0)$

Desarrollo

a) Del desarrollo en serie de Taylor para la función  $f(z)$

$$f(z) = \frac{f(z_0)}{0!} + \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots$$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z-z_0)^2}{2!} + \dots$$

$$g(z) = \frac{f(z_0)}{z-z_0} + f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0) + \dots$$

entonces  $z=z_0$  es un polo de orden 1 y además

$$\text{Res}(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \left[ \frac{f(z_0)}{z-z_0} + f'(z_0) + \dots \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) = f(z_0)$$

$$= \text{Res}(g, z_0) = f(z_0)$$

4)

Encontrar los ceros y los polos de  $f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$  y determinar el residuo en los polos.

Desarrollo

Los ceros de la función  $f(z)$  se obtiene cuando  $f(z) = 0$  es decir

$$f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} = 0 \Leftrightarrow z^2+4=0 \text{ entonces } z^2=-4 \text{ de donde } z=2i, z=-2i$$

Por lo tanto  $f(z)$  tiene dos ceros que son  $z=2i, z=-2i$  los polos se obtienen de  $z^3+2z^2+2z=0$ , de donde  $z(z^2+2z+2)=0 \Rightarrow z=0 \vee z^2+2z+2=0$



$$\text{Luego } g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)(z - z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)^2}{2!} + \dots}{z - z_0}$$

$$= f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{2!} + \dots$$

por lo tanto  $z = z_0$  es un punto singular estable de  $g(z)$ .

b) Como  $f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{1!} + \frac{f''(z_0)(z - z_0)^2}{2!} + \dots$

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} = \frac{f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{1!} + \frac{f''(z_0)(z - z_0)^2}{2!} + \dots}{(z - z_0)^2}$$

$$z = 0 \vee (z+1)^2 = -1 \Rightarrow z = 0 \vee z = -1 + 2i, z = -1 - 2i$$

por lo tanto  $f(z)$  tiene tres polos simples  $z = 0, z = -1 + 2i, z = -1 - 2i$

ahora calculamos los residuos en cada polo

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 4}{z^2 + 2z + 2} = 2$$

$$\operatorname{Res}(f, -1+i) = \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{(z+1-i)(z^2+4)}{(z+1-i)(z+1+i)(z+1+2i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{z^2+4}{(z+1+i)(z+1+2i)} = \frac{(-1+i)^2+4}{(-1+i)(-1+1+2i)} = \frac{-1+3i}{2}$$

$$= \frac{-2i+4}{(-1+i)2i} = \frac{-i+2}{(-1+i)i} = \frac{-i+2}{-1-i} = \frac{i-2}{1+i} = \frac{(i-2)(1-i)}{2} = \frac{-1+3i}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f, -1-i) = \lim_{z \rightarrow -1-i} (z+1+i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1-i} \frac{(z+1+i)(z^2+4)}{(z+1-i)(z+1+i)(z+1+2i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1-i} \frac{z^2+4}{(z+1-i)(z+1+2i)} = \frac{(-1-i)^2+4}{(-1-i)(-1-i+2i)} = \frac{2i+4}{(i+2)2i} = \frac{i+2}{-1+i} = \frac{(i+2)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-3i}{-2} = \frac{1+3i}{2}$$

Demstrar en cada caso que los puntos singulares son polos. Determinar el orden de cada polo y el residuo correspondiente.

a)  $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$  b)  $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$  c)  $f(z) = \operatorname{tgh} z$  d)  $f(z) = \frac{z}{\cos z}$

# Desarrollo

a)  $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$ , tiene un polo simple de orden 1 en  $z=1$  puesto que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z^2+2) = 3 \neq 0$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(z^2+2)}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z^2+2) = 3$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, 1) = 3$$

b)  $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3 = \frac{z^3}{(2z+1)^3}$ , tiene un polo de orden 3 en  $z = -\frac{1}{2}$  puesto que

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} (2z+1)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} z^3 = -\frac{1}{8} \neq 0$$

calculando el residuo del polo de orden 3 en  $z = -\frac{1}{2}$

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} [(2z+1)^3 f(z)]$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dz^2} [(2z+1)^3 \frac{z^3}{(2z+1)^3}] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^2 z^3}{dz^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^2 z^3}{dz^2} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d(3z^2)}{dz} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} 6z = \frac{1}{2} (6(-\frac{1}{2})) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

c)  $f(z) = \operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = \frac{p(z)}{q(z)}$ ; como  $p(z)$  y  $q(z)$  son funciones enteras, entonces

las singularidades del cociente ocurre en los ceros de  $q(z)$ , es decir en los

$$\text{puntos } \cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{como } \cosh z = \cos iz \Rightarrow iz = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = -(2k+1)\frac{\pi i}{2}$$

$$\text{entonces } q(z) = \cosh z \Rightarrow q'(z) = \operatorname{senh} z = -\operatorname{sen} iz = 0 \Rightarrow iz = k\pi \Rightarrow z = -k\pi i$$

$$\text{claramente } q'(-(2k+1)\frac{\pi i}{2}) \neq 0 \wedge p'(-(2k+1)\frac{\pi i}{2}) \neq 0$$

entonces la función es analítica en  $z = (2k+1)\frac{\pi i}{2}$  entonces son polos simples

$$\text{Luego } \operatorname{Res}(f, -(2k+1)\frac{\pi i}{2}) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{p(-(2k+1)\frac{\pi i}{2})}{q'(-(2k+1)\frac{\pi i}{2})} = \frac{\operatorname{senh}(-(2k+1)\frac{\pi i}{2})}{\operatorname{senh}(-(2k+1)\frac{\pi i}{2})} = 1$$

d)  $f(z) = \frac{z}{\cos z} = \frac{p(z)}{q(z)}$ , como  $p(z)$  y  $q(z)$  son funciones enteras, entonces las

singularidades del cociente ocurre en los ceros de  $q(z)$  es decir en los puntos

$$z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$p((2k+1)\frac{\pi}{2}) = (2k+1)\frac{\pi}{2} \neq 0 \text{ y } q'(z) = -\operatorname{sen} z \text{ donde}$$

$$q'((2k+1)\frac{\pi}{2}) = -(-1)^k \neq 0 \text{ entonces cada punto singular es un polo simple}$$

$$\text{Luego } \operatorname{Res}(f, (2k+1)\frac{\pi}{2}) = \frac{p((2k+1)\frac{\pi}{2})}{q'((2k+1)\frac{\pi}{2})} = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2}}{-(-1)^k}$$

$$f(z) = \frac{\operatorname{senh} z}{z^6(1-z^2)} = (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots) \left( \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^4} + 1 + z^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{z}{3!} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{z}{1!} + \dots$$

$$= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} + \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} + \dots = \frac{1}{z^5} + \frac{7}{6z} + z(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}) + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{7}{6}$$

Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} dz$ , donde:

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : -4 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 4 \wedge -4 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 4\}$$

Hallar el residuo de las siguientes funciones:

a)  $f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$

b)  $f(z) = \frac{\operatorname{senh} z}{z^4(1-z^2)}$

**Desarrollo**

a)  $f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$  tiene un polo simple en  $z = 0$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \left( \frac{z - \operatorname{sen} z}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - \operatorname{sen} z) = 0$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f, 0) = 0$$

b) Se conoce que  $\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots$

$$\frac{1}{z^4(1-z^2)} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2} + 1 + z^2 + \dots$$

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^5 - 4z^3 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = 2\pi i (12i) = -24\pi$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{z^5 - 4z^3 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} dz = -24\pi$$

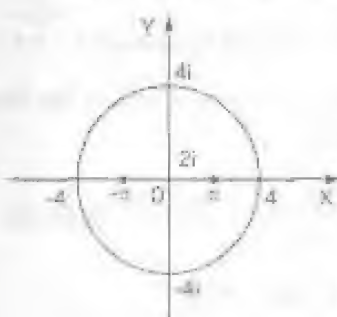
Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 4$

**Desarrollo**

$$f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \text{ los polos de } f(z) \text{ se encuentran en}$$

$$\text{sea } z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Rightarrow e^{2z} = 1$$

$$\text{donde } z = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Luego  $f(z)$  tiene 3 polos simples  $0, \pi, -\pi$  que están en el interior de  $\gamma$  entonces:

$$\oint_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, \pi) + \operatorname{Res}(f, -\pi)]$$

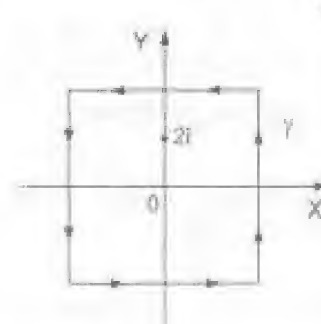
$$\text{como } f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ donde } q'(z) = \cos z$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f, \pi) = \frac{p(\pi)}{q'(\pi)} = \frac{\cos \pi}{\cos \pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f, -\pi) = \frac{p(-\pi)}{q'(-\pi)} = \frac{\cos(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i [1 + 1 + 1] = 6\pi i$$



Como  $\gamma$  es el borde del cuadrado  $x = \pm 4, y = \pm 4$

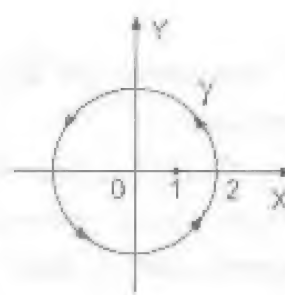
$z_0 = 2i$  es un polo de orden 6 que está en el interior de  $\gamma$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^5 + 4z^3 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$$

donde el residuo de  $f(z)$  es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2i) &= \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^5}{dz^5} \left[ (z-2i)^6 \cdot \frac{z^5 + 4z^3 - 2z^2 + 1}{(z-2i)^6} \right] \\ &= \frac{1}{5!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^5}{dz^5} (z^5 + 4z^3 - 2z^2 + 1) = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^5}{dz^5} (6z^5 + 16z^3 - 4z) \\ &= \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^3}{dz^3} (360z^3 + 48z^2 - 4) = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^2}{dz^2} (120z^3 + 96z) \\ &= \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} (360z^2 + 96) = \frac{1}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} 720z = \frac{720}{120} \lim_{z \rightarrow 2i} z = 6(2i) = 12i \end{aligned}$$

9) Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}$ , donde  $\gamma: \|z\| = 2$



**Desarrollo**

Se tiene dos polos uno simple  $z = 0$  y otro de orden 2 que es  $z = 1$ , y que están en el interior de  $\gamma$  entonces por el teorema del residuo,

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z} = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)] \quad \dots (1)$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{(z-1)^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = 1$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{e^z}{(z-1)^2 z} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z - e^z}{z^2} = e - e = 0$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z} = 2\pi i [1 + 0] = 2\pi i$$

10) Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \operatorname{tg} z dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 1$

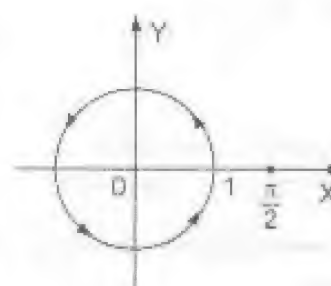
**Desarrollo**

$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ , las singularidades de  $\operatorname{tg} z$  son los ceros de  $\cos z$  es decir:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} \text{ que no está en el interior de } \gamma$$

entonces  $\operatorname{tg} z$  es analítica en  $\|z\| < 1$ , luego por el teorema de Cauchy para integrales se tiene:

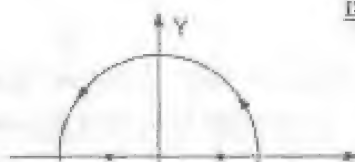
$$\oint_{\gamma} \operatorname{tg} z dz = 0$$



11) Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \operatorname{tg} z dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 2$

**Desarrollo**

$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ , las singularidades de  $\operatorname{tg} z$  son los ceros de  $\cos z$ , es decir

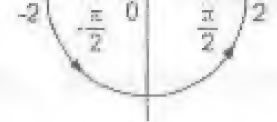


$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, 2i) + \operatorname{Res}(f, -2i)]$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \left[ \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + 4} \frac{1}{(z+i)(z-i)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z+i)}$$

$$= \frac{-1 - 2i + 2}{-1 - 2i} = \frac{1 - 2i}{-1 - 2i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$





$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}, z = -\frac{\pi}{2}$  ósea que  $\pm \frac{\pi}{2}$  son ceros de orden 1 de  $\cos z$ . en consecuencia  $\pm \frac{\pi}{2}$  son los polos de orden 1 de  $\tan z$ .

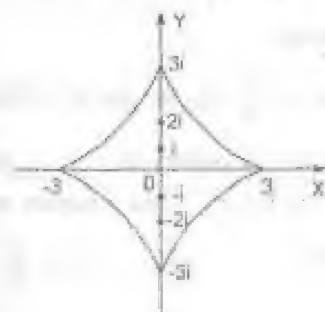
$$\oint_{\gamma} \tan z \, dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2}) + \operatorname{Res}(f, -\frac{\pi}{2}) \}$$

$$\operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{-\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \tan z \, dz = 2\pi i \{-1 + 1\} = 0$$

- 12 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^4 + 5z^2 + 4} dz$ ,  $\gamma: x^2 + y^2 = 3^2$



**Desarrollo**

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$$

deja de ser analítica en  $z = \pm 2i$ ,  $z = \pm i$  y son polos simples

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \left[ \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z - i)(z + i)} \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z - i)}$$

$$= \frac{-1 - 2i + 2}{(-1 - 4)(-2i)} = \frac{1 - 2i}{-6i} = \frac{1}{6} + \frac{i}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \left[ \frac{z^2 - 2z + 2}{(z - 2i)(z + 2i)(z^2 + 1)} \right] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z + 2i)(z^2 + 1)}$$

$$= \frac{-4 - 4i + 2}{4i(-4 + 1)} = \frac{-2 - 4i}{-12i} = \frac{1}{3} + \frac{i}{6}$$

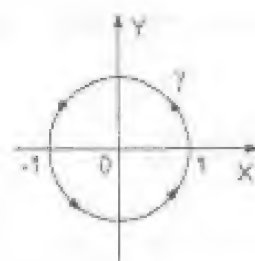
$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) \left[ \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z + 2i)(z - 2i)} \right] = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 4)(z - 2i)}$$

$$= \frac{-4 + 4i + 2}{(-4 + 1)(-4i)} = \frac{-2 + 4i}{12i} = \frac{1}{3} + \frac{i}{6}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i \left\{ \frac{1}{3} + \frac{i}{6} + \frac{1}{3} + \frac{i}{6} + \frac{1}{3} + \frac{i}{6} + \frac{1}{3} + \frac{i}{6} \right\} = 2\pi i \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi i}{3}$$

- 13 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} e^z \tan\left(\frac{1}{z}\right) dz$ , donde  $\gamma: |z| = 1$

**Desarrollo**



Tenemos un polo simple en  $z = 0$  que está en el interior de  $\gamma$ .

$$\frac{1}{z} \tan \frac{1}{z} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} + \dots \right) \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{4!z^4} + \dots + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{4!z^4} + \dots$$

de donde  $\operatorname{Res}(e^z \tan \frac{1}{z}, 0) = 1$

$$\oint_{\gamma} e^z \tan\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(e^z \tan \frac{1}{z}, 0) = 2\pi i (1) = 2\pi i$$

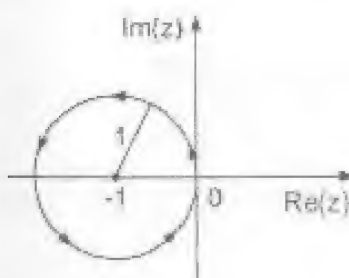
- 4 Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{ze^{az}}{(z+1)^3} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$

**Desarrollo**

$f(z) = \frac{ze^{az}}{(z+1)^3}$ , tiene un polo en  $z = -1$  de orden 3

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{(z+1)^3 ze^{az}}{(z+1)^3} \right]$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} (ze^{az}) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} (az + 1)e^{az} = \left( \frac{a}{2} + 1 \right) e^{-a}$$



$$\oint_{\gamma} \frac{ze^{az}}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i \left( \frac{a}{2} + 1 \right) e^{-a}$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{ze^{az}}{(z+1)^3} dz = \pi i (a + 2) e^{-a}$$

- 15 Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz$ , si  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

**Desarrollo**

La función  $f(z) = \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}$ , tiene polos simples en  $z = \pm i$ ,  $z = \pm 3i$  de los cuáles solamente  $z = \pm i$  están en el interior de  $\gamma$ , entonces:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)], \text{ donde}$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{4z}}{(z - i)(z + i)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{4z}}{(z + i)(z^2 + 9)} = \frac{e^{4i}}{2i(-1 + 9)} = \frac{e^{4i}}{16i}$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{e^{4z}}{(z - i)(z + i)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{4z}}{(z - i)(z^2 + 9)} = \frac{e^{-4i}}{-2i(-1 + 9)} = -\frac{e^{-4i}}{16i}$$

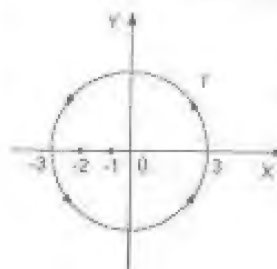
$$\oint_{\gamma} \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz = 2\pi i \left[ \frac{e^{4i}}{16i} - \frac{e^{-4i}}{16i} \right] = \frac{\pi}{8} (e^{4i} - e^{-4i}) = \frac{\pi i}{4} \left( \frac{e^{4i} - e^{-4i}}{2i} \right) = \frac{\pi i}{4} \sin 4$$

- 16 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{4z-1}{z^2+3z+2} dz$ , donde  $\gamma: |z| = 3$

**Desarrollo**

La función  $f(z) = \frac{4z-1}{z^2+3z+2} = \frac{4z-1}{(z+2)(z+1)}$  tiene

polos simples en  $z = -2$ ,  $z = -1$  y que están en el interior de  $\gamma$ .



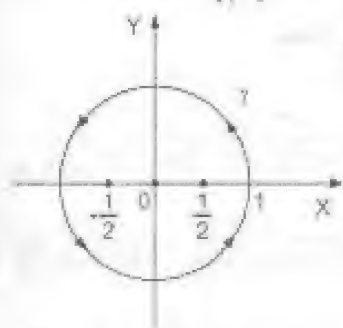
$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+3z+2} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, -2) + \operatorname{Res}(f, -1)]$ , donde

$$\operatorname{Res}(f, -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{(4z-1)}{(z+2)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{4z-1}{z+1} = 9$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{(4z-1)}{(z+2)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{4z-1}{z+2} = -5$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{4z-1}{z^2+3z+2} dz = 2\pi i (9-5) = 8\pi i$$

17 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{ig\pi z}{z^3} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$



**Desarrollo**

La función  $f(z) = \frac{ig\pi z}{z^3} = \frac{ig\pi}{z^2 \cos \pi z}$  es analítica  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $z^2 \cos \pi z = 0 \Rightarrow z=0 \vee \cos \pi z = 0$  de donde  $z = \frac{\pi}{2} + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  donde  $z=0$  es un polo de orden 3

Para  $k=0$ ,  $z = \frac{\pi}{2}$  es un polo simple que está en el interior

$k=1$ ,  $z = -\frac{\pi}{2}$  es un polo simple que está en el interior

NOTA:  $\cos \pi z = 0 \Rightarrow \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{2} = 0$  de donde

$$e^{2i\pi z} + 1 = 0 \Rightarrow e^{2i\pi z} = -1 \text{ de donde } 2\pi iz = (n\pi - i\pi) + i(\pi + 2k\pi)$$

$$2\pi z = \pi + 2k\pi \text{ entonces } z = \frac{1}{2} + k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\oint_{\gamma} \frac{ig\pi z}{z^3} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2}) + \operatorname{Res}(f, -\frac{\pi}{2})]$ , de donde

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} [z^3 \cdot \frac{ig\pi z}{z^3}] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (ig\pi z)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [ig\pi \sec^2 \pi z] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} 2ig\pi \tan \pi z \cdot \sec^2 \pi z = ig\pi \lim_{z \rightarrow 0} \tan \pi z \cdot \sec^2 \pi z = 0$$

$$\operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2}) = \frac{p(\frac{\pi}{2})}{q'(\frac{\pi}{2})} \text{ donde } \begin{cases} p(z) = ig\pi z \Rightarrow p(\frac{\pi}{2}) = ig\frac{\pi}{2} \\ q(z) = z^3 \cos \pi z \end{cases}$$

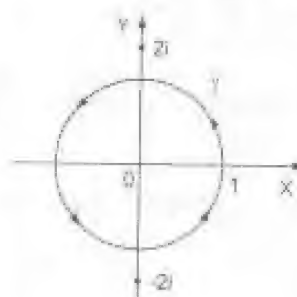
$$q'(z) = 3z^2 \cos \pi z - \pi z^3 \sin \pi z \Rightarrow q'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2}) = \frac{ig\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{8}} = -\frac{8}{\pi} ig$$

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{\pi}{2}) = \frac{p(-\frac{\pi}{2})}{q'(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-ig\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{8}} = \frac{8}{\pi} ig$$

$$\oint_{\gamma} \frac{ig\pi z}{z^3} dz = 2\pi i [0 - \frac{8}{\pi} ig + \frac{8}{\pi} ig] = -32i$$

18 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$



**Desarrollo**

$f(z) = \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)}$ , tiene polos de orden 3

en  $z=0$  y polos simples en  $z = \pm 2i$  pero  $z = \pm 2i$  no están en el interior de  $\gamma$ , entonces:

$$\oint_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0), \text{ donde}$$

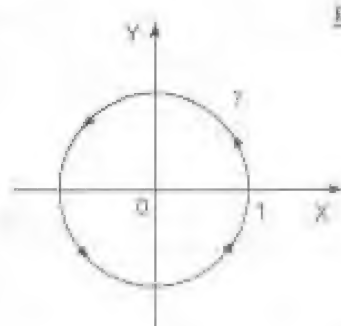
$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} [z^3 \cdot \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)}]$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (\frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^2+4}) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [8z - 3 + \frac{48 - 12z^2}{(z^2+4)^2}]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} [8 + \frac{48z^2 - 24z^3 - 288z}{(z^2+4)^3}] = \frac{1}{2} [8 + 0] = 4$$

$$\therefore \oint_{\gamma} \frac{4z^4 - 3z^3 + 17z^2 + 4}{z^3(z^2+4)} dz = 2\pi i (4) = 8\pi i$$

19 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} z^n \sin \frac{1}{z} dz$  donde  $\gamma: \|z\|=1$



**Desarrollo**

$$f(z) = z^n \sin \frac{1}{z} = z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z^n (\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots)$$

$$= z^{n-1} - \frac{z^{n-3}}{3!} + \frac{z^{n-5}}{5!} - \frac{z^{n-7}}{7!} + \dots$$

$$\oint_{\gamma} z^n \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{2\pi i}{7!}$$

20 Calcular la integral  $\oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$ , alrededor del círculo  $\gamma$  con ecuación  $\|z-1\|=4$

Sea  $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ , entonces  $z=0$  es una singularidad esencial simple de  $f(z)$  y está en el interior de  $\gamma$

Como  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  para  $x = \frac{1}{z}$  se tiene:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

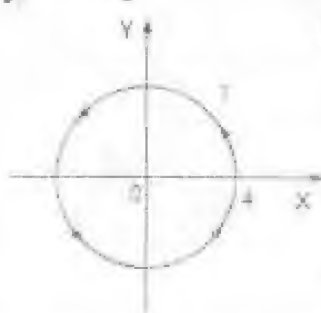
$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24z} + \frac{1}{120z^2} + \dots$$

entonces  $\operatorname{Res}(f, 0)$  = coeficiente de  $\frac{1}{z} = \frac{1}{24}$

$$\oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i (\frac{1}{24}) = \frac{\pi i}{12}$$

$$\oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{\pi i}{12}$$

21 Sea  $\gamma$  el círculo con ecuación  $\|z\|=4$ , determinar el valor de la integral si existe  $\oint_{\gamma} z^4 \cos \frac{1}{z} dz$



**Desarrollo**

$z=0$  es una singularidad esencial simple y está en el interior de  $\gamma$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$



para  $v = \frac{1}{z} = z^{-1}$ , se tiene:  $\operatorname{cosec} \frac{1}{z} = z + \frac{7}{360} z^{-1} + \frac{31}{15120} z^{-3} + \frac{127}{604800} z^{-5} + \dots$

$$f(z) = z^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{z} = z^3 + \frac{7}{360} z^{-1} + \frac{31}{15120} z^{-3} + \frac{127}{604800} z^{-5} + \dots$$

$\operatorname{Res}(f, 0) = \text{coeficiente de } z^{-1} = \frac{7}{360}$

$$\oint_{\gamma} z^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \left( \frac{7}{360} \right) = \frac{7\pi i}{180}$$

(22) Calcular la integral  $\oint_{\gamma} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \|z\| = \frac{1}{2}\}$

Desarrollo

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{3!} z^{-3} + \dots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \dots$$

$$z^5 e^{\frac{1}{z}} = z^5 + z^4 + \frac{z^3}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^0}{5!} + \frac{z^{-1}}{6!} + \frac{z^{-2}}{7!} + \dots$$

Luego  $\operatorname{Res}(f, 0) = \text{coeficiente de } \frac{1}{z} = \frac{1}{9!}$ , entonces:

$$\oint_{\gamma} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \left( \frac{1}{9!} \right) = \frac{\pi i}{177144}$$

(23) Calcular  $\oint_{\gamma} (1+z+z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-5}} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \|z\| = 6\}$

Desarrollo

$$e^{\frac{1}{z-5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-5)^n} = \frac{1}{z-5} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-5)^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-5)^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{(z-5)^4} + \dots$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (1+z+z^2+z^3) e^{\frac{1}{z-5}} dz &= \oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z-5}} dz \\ &= \oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z-5}} dz + \oint_{\gamma} z^3 e^{\frac{1}{z-5}} dz \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$e^{\frac{1}{z-5}} = 1 + \frac{1}{z-5} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-5)^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-5)^n} + \dots \Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 1$$

$$\oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z-5}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \quad \dots (2)$$

$$z e^{\frac{1}{z-5}} = z + 1 + \frac{1}{2!} \frac{1}{z-5} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-5)^n} + \dots \text{ entonces } \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$$

$$\oint_{\gamma} z e^{\frac{1}{z-5}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \left( \frac{1}{2} \right) = \pi i \quad \dots (3)$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-5}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} \frac{1}{z-5} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-5)^n} + \dots \text{ entonces } \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z-5}} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi i}{3} \quad \dots (4)$$

$$\text{hacemos } z-5=u \Rightarrow \begin{cases} z=u+5 \\ z^2=u^2+10u+25 \\ z^3=u^3+15u^2+75u+125 \end{cases}$$

$$e^{\frac{1}{z-5}} = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{2!} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{u^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{u^4} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{u^n} + \dots$$

Si  $u = (1+z-z^2-z^3)e^{\frac{1}{z-5}}$ , de donde

$$u = [1 + (u+5) + (u^2+10u+25) + (u^3+15u^2+75u+125)] \left[ 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{2!} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{u^3} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} &= \left[ 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + \dots + \left[ \frac{1}{2u} + \frac{1}{6u^2} + \dots + 5 + \frac{5}{u} + \frac{5}{2u^2} + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^2 + u + \frac{1}{2} + \frac{1}{6u} + \dots + \frac{1}{24u^2} + 10u + \dots + 10 + \frac{10}{2u} + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 35 + \frac{25}{u} + \dots + u^3 + u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24u} + \dots + 15u^2 + 15u + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{15}{2} + \frac{15}{6u} + \dots + 75u + 75 + \frac{75}{2u} + \dots + \frac{125}{2u} + \frac{125}{u} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (1+z+z^2+z^3) e^{\frac{1}{z-5}} dz &= 2\pi i \left[ \left( \frac{1}{2} + 5 + \frac{1}{6} + 5 + 25 + \frac{1}{24} + \frac{5}{2} + \frac{75}{2} + 125 \right) \right] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1617}{8} \right] = \frac{1617\pi i}{4} \end{aligned}$$

(24) Calcular  $\oint_{\gamma} (1+z+z^2) \left( e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \|z\| = 3\}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} (1+z+z^2) \left( e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) &= e^{\frac{1}{z}} + z e^{\frac{1}{z}} + z^2 e^{\frac{1}{z}} + z e^{\frac{1}{z-1}} + z^2 e^{\frac{1}{z-1}} + \\ &\quad + e^{\frac{1}{z-2}} + z e^{\frac{1}{z-2}} + z^2 e^{\frac{1}{z-2}} \end{aligned}$$

hacemos  $z-1=u \Rightarrow z=u+1$

$$z e^{\frac{1}{z-1}} = 1+u + \frac{1+u}{u} + \frac{u+1}{2!} \frac{1}{u^2} + \dots + \frac{u+1}{n!} \frac{1}{u^n} + \dots = 1+0+1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{2!} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{u^3} + \dots + \frac{u+1}{n!} \frac{1}{u^n} + \dots$$

$$\oint_{\gamma} z e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi i \left[ 1 + \frac{1}{2} \right] = 3\pi i \quad \dots (6)$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = z^2 + \frac{z^2}{z-1} + \frac{z^2}{2!} \frac{1}{(z-1)^2} + \dots + \frac{z^2}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} + \dots$$

hacemos  $z-2=u \Rightarrow z=2+u$

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z-2}} &= (u+2)^2 + \frac{(u+2)^2}{u} + \frac{(u+2)^2}{2!} \frac{1}{u^2} + \dots + \frac{(u+2)^2}{n!} \frac{1}{u^n} + \dots \\ &= u^2 + 2u + 4 + u + 2 + \frac{1}{u} + \frac{4}{2!} + \frac{1}{u} + \frac{1}{2!} \frac{1}{u^2} + \dots + \frac{(u+2)^2}{n!} \frac{1}{u^n} + \dots \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i \left[ 1 + \frac{1}{6} + 1 \right] = 2\pi i \left[ \frac{13}{6} \right] = \frac{13\pi i}{3} \quad \dots (7)$$

$$e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-2)^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-2)^n} + \dots \text{ entonces } \operatorname{Res}(f, 2) = 1$$

$$\oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2) = 2\pi i \quad \dots (8)$$

$e^{z-1} = 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \dots$ , entonces:  $\text{Res}(f, 1) = 1$

$$\oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z-1}} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 2\pi i(1) = 2\pi i \quad \dots (5)$$

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = z + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2!(z-1)^2} + \dots + \frac{z}{n!(z-1)^n} + \dots$$

$$= u + 2 + 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{2!u} + \frac{2}{2!u^2} + \dots + \frac{u+1}{n!u^n} + \dots \Rightarrow \text{Res}(f, 2) = 2 + \frac{1}{2!}$$

$$\oint_{\gamma} ze^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 2) = 2\pi i(2 + \frac{1}{2!}) = 5\pi i \quad \dots (9)$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-2}} = z^2 + \frac{z^2}{2!(z-2)^2} + \frac{z^2}{3!(z-2)^3} + \dots + \frac{z^2}{n!(z-2)^n} + \dots$$

hacemos  $u = z - 2 \Rightarrow z = u + 2$

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z-2}} &= (u+2)^2 + \frac{(u+2)^2}{2!u^2} + \frac{(u+2)^2}{3!u^3} + \dots + \frac{(u+2)^2}{n!u^n} + \dots \\ &= (u+2)^2 + u + 4 + \frac{4}{u} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{u} + \frac{4}{2u^2} + \frac{1}{3!u} + \frac{4}{3!u^2} + \dots + \frac{(u+2)^2}{n!u^n} + \dots \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} z^2 e^{\frac{1}{z-2}} dz = 2\pi i(4 + 2 + \frac{1}{6}) = 2\pi i(\frac{37}{6}) = \frac{37\pi i}{3} \quad \dots (10)$$

ahora reemplazamos (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) y (10) en (1)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}) dz &= 2\pi i + \pi i + \frac{\pi}{3}i + 2\pi i + 3\pi i + \frac{13\pi}{3}i + 2\pi i + 5\pi i + \frac{37\pi}{3}i \\ &= 15\pi i + \frac{5\pi i}{3} = 15\pi i + 17\pi i = 32\pi i \end{aligned}$$

$$\therefore \oint_{\gamma} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}) dz = 32\pi i$$

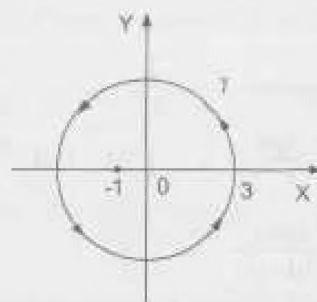
15. Calcular la integral:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+1)^5}$ ,  $t > 0$  donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = 3\}$

Desarrollo

$$\frac{1}{ze^{z-2}} = z + \frac{z}{z-2} + \frac{z}{2!(z-2)^2} + \dots + \frac{z}{n!(z-2)^n} + \dots$$

hacemos  $u = z - 2$ , entonces  $z = u + 2$

$$ze^{\frac{1}{z-2}} = u + 2 + \frac{u+2}{2!u^2} + \dots + \frac{u+2}{n!u^n} + \dots$$



La integral se puede calcular por el Teorema del residuo y por el criterio de la integral de Cauchy primero calculamos la integral por el teorema del residuo

la función  $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^5}$  tiene un polo en  $z = -1$  de orden 5.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1) &= \frac{1}{(5-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^4}{dz^4} [(z+1)^5 \frac{e^z}{(z+1)^5}] = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^4}{dz^4} (e^z) \\ &= \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} e^z = \frac{e^{-1}}{24} = \frac{e^{-1}}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+1)^5} = \frac{1}{2\pi i} [2\pi i \text{Res}(f, -1)] = \text{Res}(f, -1) = \frac{e^{-1}}{24}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+1)^5} = \frac{e^{-1}}{24}$$

ahora calculamos por el criterio de la integral de Cauchy.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \text{ de donde } n=4, z_0=-1$$

$$f(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(4)}(-1) = \frac{e^{-1}}{1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z+1)^{4+1}} = \frac{f^{(4)}(-1)}{4!} = \frac{e^{-1}}{4!} = \frac{e^{-1}}{24}$$

## 7. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Hallar el residuo en  $z=0$ , de las siguientes funciones:

a)  $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$       b)  $f(z) = \frac{z-3\pi z}{z}$       c)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^4}$

d)  $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$       e)  $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$

2. Calcular el residuo en los polos correspondientes a la función:

a)  $f(z) = \frac{1-\cosh z}{z^3}$       b)  $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$       c)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

3. Encuentre el residuo en todas las singularidades para las siguientes funciones dadas.

a)  $f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$       b)  $f(z) = \frac{e^z}{z^3-z}$       c)  $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2}$

d)  $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$       e)  $f(z) = ze^z$       f)  $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z}}$

6. Halle los puntos singulares de las funciones y analice la naturaleza de los mismos.

a)  $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$       b)  $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$       c)  $f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}$

d)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2}$       e)  $f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$       f)  $f(z) = \frac{z^2+1}{e^z}$

7. Halle los puntos singulares de las funciones y analice la naturaleza de los mismos.

a)  $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$       b)  $f(z) = ze^{-z}$       c)  $f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$

d)  $f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^{-z}}$       e)  $f(z) = \frac{1}{z^2(2-\cos z)}$       f)  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

g)  $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$       h)  $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$       i)  $f(z) = e^{\frac{z-1}{z}}$

8. Calcular los residuos de las funciones dadas en todos sus puntos singulares aislados.



Determine todas las singularidades de la función y clasifique cada singularidad.

- a)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$       b)  $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}$       c)  $f(z) = e^z(z-1)$   
 d)  $f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi}$       e)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$       f)  $f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$

Determine todas las singularidades de la función y clasifique que cada singularidad

- a)  $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$       b)  $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+1)}$       c)  $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+2z-3)^2}$   
 d)  $f(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}$       e)  $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z-i)^2}$       f)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$

- a)  $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$       b)  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$       c)  $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$   
 d)  $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$       e)  $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$       f)  $f(z) = \lg z$

9. Calcular los residuos de las funciones indicadas en todos sus puntos singulares aislados.

- a)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$       b)  $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$       c)  $f(z) = \sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$   
 d)  $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$       e)  $f(z) = \operatorname{cosec}^2 z$       f)  $f(z) = \cos\left(\frac{z^2+4z-1}{z+3}\right)$

10. Encuentre el residuo de la función en cada singularidad

- a)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$       b)  $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}$       c)  $f(z) = e^z(z-1)$   
 d)  $f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi}$       e)  $f(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^2(z^2+1)}$       f)  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$

11. Encuentre el residuo de la función en cada singularidad

- a)  $f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$       b)  $f(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}$       c)  $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$   
 d)  $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-\pi)(z-i)^2}$       e)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$       f)  $f(z) = \frac{\sinh z}{z^5}$   
 g)  $f(z) = \frac{2z-1}{(z^2+2z-3)^2}$       h)  $f(z) = \frac{\sin z}{(z+\pi)^2}$       i)  $f(z) = \frac{1}{\sin^3(2z)}$

12. Evalúe cada integral donde  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple suave a pedazos que encierra a todas las singularidades del integrando.

- a)  $\oint_{\gamma} \frac{2z \, dz}{(z-i)^2}$       b)  $\oint_{\gamma} \frac{1+z^2}{(z-1)^4(z+2i)} \, dz$       c)  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z \, dz}{4+z^2}$   
 d)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z \, dz}{z}$       e)  $\oint_{\gamma} \frac{z-i}{2z+1} \, dz$       f)  $\oint_{\gamma} \frac{z+i}{z^2+6} \, dz$

13. Evalúe las integrales donde  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple suave a pedazos que encierra a todas las singularidades del integrando.

- a)  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{ze^z} \, dz$       b)  $\oint_{\gamma} e^{\frac{2}{z}} \, dz$       c)  $\oint_{\gamma} \frac{(z \, dz)}{(z^2+9)(z-i)^2}$   
 d)  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 \, dz}{z-1+2i}$       e)  $\oint_{\gamma} \frac{8z-4i+1}{z+4i} \, dz$       f)  $\oint_{\gamma} \frac{(1-z)^2 \, dz}{z^3-8}$

14. Evalúe la integral donde  $\gamma: \|z\| = 2$

- a)  $\oint_{\gamma} \frac{z^3 \, dz}{z^2+1}$       b)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z \, dz}{z^2+z}$

15. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3+z} \, dz$  donde  $\gamma: \|z-\frac{1}{2}\| = 1$

16. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\cosh(2z) \, dz}{(z-i)(1+z^2)}$ , donde  $\gamma: \|z-i\| = 1$

17. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\sin z \, dz}{(z^3+z)^2}$ , donde  $\gamma: \|z\| = 2$

18. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n(z^2+1)^2}$ , donde  $\gamma: \|z-1\| = 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

19. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$ , donde  $\|z-i\| = \frac{3}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

20. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z(z^2-4)^2}{(z+i)^2} \, dz$ , donde  $\gamma: \|z-1+2i\| = 4$

21. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$ , donde  $\gamma: \|z-1\| = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

22. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$ , donde  $\gamma: \|z-i\| = \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

23. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{2z-3}{(z+i)} \, dz$ , donde  $\gamma: \|z-2i\| = 4$

24. Hallar el valor de la integral  $\oint_{\gamma} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} \, dz$ , en sentido positivo a lo largo del círculo  $\gamma: \|z-2\| = 2$

25. Hallar el valor de la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z+4)}$  en sentido positivo a lo largo del círculo  $\gamma: \|z+2\| = 3$

26. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{\sin z \cos 2z \, dz}{z^2+9}$ , donde  $\gamma$  encierra a  $i$  pero no a  $-i$ .

27. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^{2z} \, dz}{z(z-i)}$ , donde  $\gamma$  encierra a  $0$  e  $i$ .

28. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^4} \, dz$  donde  $\gamma: \|z-\pi i\| = 2\pi$

29. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$ , donde  $\gamma: \|z\| = 2$

30. Evalúe la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z \sin z}$ , alrededor de  $\gamma: \|z-6\| = 4$

31. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{ze^{-z} \, dz}{z^3+i}$ , donde  $\gamma: \|z-5\| = 1$

32. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{z - \cos(4iz)}{(z^2+1)(z^2-1)} \, dz$ , donde  $\gamma: \|z+i\| = 1$

33. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{3(z-1)^2-1}{z^2} \, dz$ , donde  $\gamma: \|z\| = 2$



39. Calcular  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+2z+2)}$  alrededor del círculo  $\gamma$  con ecuación  $\|z\|=3$ .
40. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{(2z^2+5)}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$ , donde  $\gamma$  es el cuadrado con vértices en  $1+i, 2+i, 2+2i, 1+2i$ .
41. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{2+3\operatorname{sen} \pi z}{z(z-1)^2} dz$ , donde  $\gamma$  es el cuadrado con vértices en  $3+3i, 3-3i, -3+3i, -3-3i$ .
42. Probar que:  $\oint_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^3} dz = \pi i$ , donde  $\gamma$  es el cuadrado con vértices en  $\pm 2 \pm 2i$ .
43. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{(z+1)\cosh z}{(z-1)(z+2)} dz$ , donde  $\gamma: \|z-3i\|=\frac{3}{2}$ .
44. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$ , donde  $\gamma: \|z-2\|=\frac{1}{2}$ .
45. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1}$  donde  $\gamma: x^2+y^2=2x$ .

- Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z - 3z^3 + 4z - 2}{z^3} dz$ , donde  $\gamma$  es el rectángulo de lados:  $x=0, x=2, y=2, y=-2$  recorrido en sentido positivo.
41. Integrar  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z dz}{z^3+z}$ , sobre:
- a)  $\gamma: \|z\|=2$       b)  $\gamma: \|z\|=\frac{1}{2}$       c)  $\gamma: \|z-\frac{i}{2}\|=1$
42. Si  $\gamma$  es el rectángulo:  $x=\pm 4, y=\pm 4$ . Descrita en dirección positiva, calcular:
- a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$       b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh 2z dz}{(z-\frac{\pi}{4})^2}$
43. Evaluar la integral donde  $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- a)  $\oint_{\gamma} \frac{1}{e^z} dz$       b)  $\oint_{\gamma} e^{\frac{1}{z^2}} dz$
44. Sea  $\gamma$  el círculo  $\|z\|=2$  positivamente orientado, calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{\sinh 2z}$ .

- Probar que si  $\gamma$  es el círculo  $\|z\|=8$ , positivamente orientado, entonces  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{2t} dt}{\sinh t} = 1 - 2\cos \pi t + 2\cos 2\pi t$ .
6. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^3+z} dz$ , donde  $\gamma: \|z-1\|=\frac{1}{2}$ .
7. Calcular integral  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} \pi(z-1) dz}{z^3-2z+2}$ , donde  $\gamma: \|z-1-i\|=1$ .
8. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$ , donde  $\gamma: \|z\|=4$ .
9. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{4z^4-3z^3+17z^2+4}{z^3(z^2+4)} dz$ , donde  $\gamma: x^2+y^2=3^{\frac{2}{3}}$ .
10. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{10z^5-2z^4+2z-1}{2z^6-z^5} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$ .
11. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{2z^6+14z^2+16}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=4$ .
12. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2(z-2)(z+5)}$ , donde  $\gamma: \|z\|=3$ .
13. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{z^2-z^4}{(z-1)\cos z} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=4$ .
14. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\cosh(z) dz}{z(z^2+9)}$ , donde  $\gamma: \|z-2i\|=9$ .
15. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{(z-i)^2 dz}{\operatorname{sen}^2 z}$ , donde  $\gamma$  es el cuadrado con vértices  $4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$ .

56. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z - \sinh z}{z^3} dz$ , donde  $\gamma: \|z+1\|=\frac{3}{2}$ .
57. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{(z-2)^2 dz}{z^3-2z+2}$ , donde  $\gamma: \|z\|=8$ .
58. Calcular  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^{2z} dz}{z(z^2+1)}$ ,  $t>0$  alrededor del cuadrado con vértices en  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ .
59. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{(2z^2+5) dz}{(z+1)(z^2+1)^2}$ , donde  $\gamma: \|z+i\|=1$ .
60. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$ , alrededor de  $\gamma: \|z-6\|=4$ .
61. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{\sinh \frac{1}{z}}{z-1} dz$ , alrededor de  $\gamma: \|z\|=2$ .
62. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{\sinh^2 z} dz$ , alrededor de  $\gamma: \|z\|=3$ .
63. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}$ , donde  $\gamma: \|z\|=3$ .
64. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz$ , donde  $\gamma: x^2+y^2-2x=0$ .
65. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-\pi)^3}$ , donde  $\gamma: \|z\|=4$ .
66. Calcular  $\oint_{\gamma} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$ .
67. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz} dz$ , donde  $\gamma: \|z-i\|=3$ .

68. Calcular  $\int_{\gamma} \frac{z}{e^z+2} dz$ , donde  $\gamma: \|z+1\|=4$ .
69. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$ , donde  $\gamma: \|z-i\|=1$ .

## CAPÍTULO IX



70. Calcular  $\oint_{\gamma} (z+1)e^{z^2} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=3$

71. Calcular  $\oint_{\gamma} (z^2+z^3)e^{\frac{1}{z-4}} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=5\}$

72. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^{6z^2+1}}{z^4-z^2} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=1\}$

73. Evaluar la integral  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}$ , donde  $\gamma: \|z\|=2$

74. Evaluar  $\oint_{\gamma} z^n \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$

75. Calcular  $\oint_{\gamma} (1+z+z^2+z^3+z^4)(e^{z-1}+e^{z-2}) dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=3\}$

76. Calcular la integral  $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{10}+1}$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=2\}$

77. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-3)^{150}}$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z-1\|=6\}$

78. Evaluar  $\oint_{\gamma} \frac{z^{10}+z^4-4z+1}{(z-6)^n} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=3\}$

79. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{27z^3-18z^2-5z+2}{9z^4-z^2} dz$ , donde  $\gamma: \|z\|=1$

80. Calcular  $\oint_{\gamma} \frac{9z^2-iz+4}{z^3(z^2+1)} dz$ , donde  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\|=\frac{1}{2}\}$

## 9. INTEGRALES ESPECIALES.-

En este capítulo presentaremos algunas técnicas útiles para aplicar el teorema del Residuo para la evaluación de las integrales reales definidas e impropias, los tipos específicos de integrales reales considerados son las siguientes.

### ① INTEGRALES DE LA FORMA: $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$

Para evaluar una integral de la forma  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$  donde  $R$  es una función

racional de seno y coseno, es suficiente recordar que:  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Además se tiene que  $z = e^{i\theta}$  donde  $\gamma: \|z\|=1$ , transforma a la integral dada en

una integral de línea donde:  $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

parametrizando la curva  $\gamma$  mediante  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  por lo tanto se tiene:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta = \oint_{\gamma} R\left[\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)\right] \frac{dz}{iz}$$

En esta integral de línea se aplica el teorema del Residuo.

**Ejemplo.-** Evaluar la integral  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \frac{\cos \theta}{4}}$

#### Desarrollo

Sea  $\gamma: \|z\|=1$ , orientado en sentido anti-horario.

Transformamos a la integral definida en una integral de línea mediante la sustitución

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \frac{\cos \theta}{4}} = \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{iz}}{1 + \frac{1}{8} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \oint_{\gamma} \frac{4(z^2+1)dz}{iz(z^2+8z+1)}$$

Los polos simples que están dentro de  $\gamma$  son  $z=0$  y  $z=-4+\sqrt{15}$  y el polo que está fuera del interior de  $\gamma$  es  $z=-4-\sqrt{15}$

Calculando los residuos de las singularidades en el interior de  $\gamma$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z^2+1)4}{iz(z^2+8z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4(z^2+1)}{i(z^2+8z+1)} = -4i$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -4+\sqrt{15}) &= \lim_{z \rightarrow -4+\sqrt{15}} \frac{(z+4-\sqrt{15})4(z^2+1)}{iz(z+4-\sqrt{15})(z+4+\sqrt{15})} \\ &= \lim_{z \rightarrow -4+\sqrt{15}} \frac{4(z^2+1)}{iz(z+4+\sqrt{15})} = \frac{16i}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

mediante el teorema del residuo se tiene:

$$\oint_{\gamma} \frac{4(z^2+1)dz}{iz(z^2+8z+1)} = 2\pi i \left( -4i + \frac{16i}{\sqrt{15}} \right) = 2\pi \left( \frac{4\sqrt{15}-16}{\sqrt{15}} \right)$$

**Ejemplo.-** Demostrar que:  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ,  $a > b > 0$

#### Desarrollo

Como  $\cos \theta$ , toma los mismos valores en  $[\pi, 2\pi]$  que en el intervalo  $[0, \pi]$ , entonces a la integral dada expresémosla

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta}, \quad a > b > 0$$

ahora transformamos a la integral definida en una integral de línea donde

$$\gamma: \|z\|=1, \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{a + \frac{b}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

calculando los polos en el círculo interior  $\gamma: \|z\|=1$

$$bz^2 + 2az + b = 0 \Rightarrow z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad \text{de donde}$$

$$z = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b} \text{ es un polo que está dentro de } \gamma: \|z\|=1$$

$$z = \frac{-a - \sqrt{a^2-b^2}}{b} \text{ es un polo que está fuera de } \gamma: \|z\|=1$$

ahora calculamos el residuo de  $f$  en  $z = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}} \left( z - \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b} \right) f(z)$$